第20卷第3期
2000年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 20 No. 3
Aug. 2000

关于亚纯多叶函数的子类*

徐　能[1]，　杨定恭[2]
（1. 常熟高等专科学校，江苏 215500；　2. 苏州大学数学系，215006）

摘　要：本文引进单位圆盘内以原点为 p 级极点的亚纯多叶函数的新子类 $M_p(n,\lambda,A,B)$（p 是正整数，n 是非负整数，$-1\leqslant B<A\leqslant 1$，$-\frac{\pi}{2}<\lambda<\frac{\pi}{2}$），证明 $M_p(n+1,\lambda,A,B)\subset M_p(n,\lambda,A,B)$，研究类中函数的积分变换，得到准确的系数估计和一个卷积性质.

关键词：多叶函数；亚纯函数；积分；从属.
分类号：AMS(1991) 30C45/CLC O174.51
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2000)03-0381-08

1　引　言

为避免重复，全文设 p 是正整数，n 是非负整数，$-1\leqslant B<A\leqslant 1$，$0\leqslant\alpha<1$，$-\frac{\pi}{2}<\lambda<\frac{\pi}{2}$，$E_0=\{z:0<|z|<1\}$，$E=\{z:|z|<1\}$，当 $B\neq -1$ 时，记

$$a=1-\frac{B(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}}{1-B^2},\ b=\frac{(A-B)\cos\lambda}{1-B^2}. \tag{1}$$

设 $\sum_p$ 表示在 E_0 内解析且以原点为 p 级极点的形如

$$f(z)=z^{-p}+\sum_{m=1-p}^{\infty}a_m z^m \tag{2}$$

的函数组成的类. 文献[1]～[7]研究了 $\sum_1$ 或 $\sum_p$ 的各种子类. 本文引进和研究 $\sum_p$ 的新子类 $M_p(n,\lambda,A,B)$.

对于 $f(z)\in\sum_p$ 定义算子

$$D_p^0 f(z)=f(z),\quad D_p^1 f(z)=z^{-p}(z^{p+1}D_p^0 f(z))'$$

和

$$D_p^{n+1} f(z)=z^{-p}(z^{p+1}D_p^n f(z))'.$$

上式等价于

$$D_p^{n+1} f(z)=(p+1)D_p^n f(z)+z(D_p^n f(z))'. \tag{3}$$

* 收稿日期：1997-10-13
基金项目：江苏省教委自然科学基金资助项目(96KJB110001)
作者简介：徐　能(1961-)，讲师.

容易验证，对于 $\sum_p$ 中形如(2)的函数 $f(z)$，有

$$D_p^n f(z)=z^{-p}+\sum_{m=1-p}^{\infty}(p+m+1)^n a_m z^m. \tag{4}$$

因此算子 D_p^n 与 Flett [8] 引进的乘子变换密切相关.

定义 函数 $f(z)\in\sum_p$ 称为在类 $M_p(n,\lambda,A,B)$ 中，如果它满足从属关系

$$-\frac{z^{p+1}(D^n f(z))'}{p}\prec\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})z}{1+Bz}\quad(z\in E),$$

也就是满足

$$-\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}=\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z)}{1+Bw(z)}\quad(z\in E), \tag{5}$$

这里 $w(z)$ 在 E 内解析，$w(0)=0$ 且 $|w(z)|<1\quad(z\in E)$.

若 $A=1-2\alpha$ 和 $B=-1$，则

$$\begin{aligned}M_p(n,\lambda,\alpha)&\equiv M_p(n,\lambda,1-2\alpha,-1)\\&=\left\{f(z)\in\sum\nolimits_p:\mathrm{Re}(-e^{i\lambda}z^{p+1}(D_p^n f(z))')>p\alpha\cos\lambda\quad(z\in E)\right\}.\end{aligned}$$

首先证明包含关系 $M_p(n+1,\lambda,A,B)\subset M_p(n,\lambda,A,B)$. 进而研究类 $M_p(n,\lambda,A,B)$ 和 $M_p(n,\lambda,\alpha)$ 中函数的积分变换；对类 $M_p(n,\lambda,\alpha)$ 还讨论了反问题. 最后给出准确的系数估计和一个卷的性质.

为导出本文结果，需要以下引理.

引理 1 设 $-1<B<A\leqslant 1$，则 $f(z)\in\sum_p$ 在类 $M_p(n,\lambda,A,B)$ 中当且仅当

$$\left|\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}+a\right|<b\quad(z\in E), \tag{6}$$

这里 a 和 b 由(1)给出.

证明 设 $f(z)\in M_p(n,\lambda,A,B)$，则从(5)有

$$-\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}-a=(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}\left(\frac{w(z)}{1+Bw(z)}+\frac{B}{1-B^2}\right)=be^{-i\lambda}\frac{w(z)+B}{1+Bw(z)}.$$

这里 $|w(z)|<1$，得到(6).

反之，设(6)成立，置

$$g(z)=-\frac{e^{i\lambda}}{b}\left(\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}+a\right) \tag{7}$$

和

$$w(z)=\frac{g(z)-g(0)}{1-g(0)g(z)}, \tag{8}$$

则 $|g(z)|<1\ (z\in E)$，$g(0)=\frac{e^{i\lambda}}{b}(1-a)=B$，因此 $w(z)$ 在 E 内解析，$w(0)=0$ 且 $|w(z)|<1$ $(z\in E)$. 将(7)代入(8)化简得

$$w(z)=-\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'+p}{Bz^{p+1}(D_p^n f(z))'+p(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})},$$

从而 $f(z)\in M_p(n,\lambda,A,B)$. 证毕.

指出，条件(6)可以改写成

$$\left|\frac{-e^{i\lambda}(z^{p+1}(D_p^n f(z))'/p+1)+(A-B)\cos\lambda/(1-B)}{(A-B)\cos\lambda/(1-B)}-\frac{1}{1+B}\right|<\frac{1}{1+B}\ (z\in E).\tag{9}$$

当 $A=1-2\alpha$ 和 $B\to-1$ 时,(9)化为

$$\mathrm{Re}\{-e^{i\lambda}z^{p+1}(D_p^n f(z))'\}>p\alpha\cos\lambda\quad(z\in E),$$

因此,包括情形 $B\to-1$,引理 1 对 $-1\leqslant B<A\leqslant 1$ 成立.

引理 2[9] 设 $w(z)$在 $|z|<R$ 内解析,不恒为常数且 $w(0)=0$. 若 $|w(z)|$在圆 $|z|=r$ $(0<r<R)$上一点 z_0 达到其最大值,则 $z_0w'(z_0)=\mu w(z_0)$,这里 μ 是实数且 $\mu\geqslant 1$.

2 包含关系

定理 1 $M_p(n+1,\lambda,A,B)\subset M_p(n,\lambda,A,B)$.

证明 设 $f(z)\in M_p(n+1,\lambda,A,B)$,则用

$$-\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}=\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z)}{1+Bw(z)}\tag{10}$$

定义的函数 $w(z)$在 E 内解析或亚纯,且 $w(0)=0$.

鉴于(3),式(10)写成

$$D_p^{n+1}f(z)=(p+1)D_p^n f(z)-pz^{-p}\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z)}{1+Bw(z)}.$$

上式两端求导后再用(10),得

$$\begin{aligned}z^{p+1}(D_p^{n+1}f(z))'&=(p+1)z^{p+1}(D_p^n f(z))'+p^2\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z)}{1+Bw(z)}-\\&\quad p(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}\frac{zw'(z)}{(1+Bw(z))^2}\\&=-p\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z)}{1+Bw(z)}-\\&\quad p(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}\frac{zw'(z)}{(1+Bw(z))^2},\end{aligned}\tag{11}$$

于是

$$-\frac{z^{p+1}(D_p^{n+1}f(z))'}{p}-a=\frac{h(z)}{(1+Bw(z))^2},\tag{12}$$

这里

$$\begin{aligned}h(z)&=(1-a+(B(1-a)+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z))(1+Bw(z))\\&\quad+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}zw'(z)\\&=be^{-i\lambda}((w(z)+B)(1+Bw(z))+(1-B^2)zw'(z)).\end{aligned}$$

现在证明 $w(z)$在 E 内解析且 $|w(z)|<1(z\in E)$. 假若不然,一定存在 $z_0\in E_0$,使

$$\max_{|z|\leqslant|z_0|}|w(z)|=|w(z_0)|=1.$$

应用引理 2,得 $z_0w'(z_0)=\mu w(z_0)(\mu\geqslant 1)$. 置 $w(z_0)=e^{i\theta}$,从(12)推出当 $z=z_0$,有

$$\left|\frac{z^{p+1}(D_p^{n+1}f(z))'}{p}+a\right|^2_{z=z_0}-b^2=\frac{b^2H}{|1+Be^{i\theta}|^4},$$

这里

$$H=|(e^{i\theta}+B)(1+Be^{i\theta})+(1-B^2)\mu e^{i\theta}|^2-|1+Be^{i\theta}|^4$$
$$=\mu(1-B^2)(2(1+B^2+2B\cos\theta)+\mu(1-B^2))\geqslant 0.$$

但由引理1,这与$f(z)\in M_p(n+1,\lambda,A,B)$是矛盾的.因此,$|w(z)|<1(z\in E)$,且从(10)知$f(z)$在类$M_p(n,\lambda,A,B)$中.证毕.

3 积分算子

定理2 设c是复数且$\mathrm{Re}\,c>0$.若$f(z)\in M_p(n,\lambda,A,B)$则

$$F(z)=\frac{c}{z^{p+c}}\int_0^z t^{p+c-1}f(t)\mathrm{d}t. \tag{13}$$

证明 从$F(z)$的定义有

$$cf(z)=(p+c)F(z)+zF'(z).$$

因此

$$cD_p^n f(z)=(p+c)D_p^n F(z)+z(D_p^n F(z))', \tag{14}$$

置

$$-\frac{z^{p+1}(D_p^n F(z))'}{p}=\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z)}{1+Bw(z)}, \tag{15}$$

则$w(z)$在E内解析或亚纯,且$w(0)=0$.

从(14)和(15)得

$$cD_p^n f(z)=(p+c)D_p^n F(z)-pz^{-p}\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z)}{1+Bw(z)}.$$

上式两端求导后再用(15)导致

$$-\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}=\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})w(z)}{1+Bw(z)}+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}\frac{zw'(z)}{c(1+Bw(z))^2}. \tag{16}$$

其余仿照定理1的证明.根据引理1和引理2,从(16)可推出$w(z)$在E内解析且$|w(z)|<1(z\in E)$.于是由(15)知$F(z)\in M_p(n,\lambda,A,B)$.

当$c=1$时,定理2的结果可改进为下述

定理3 设$f(z)\in\sum_p$,则$f(z)$在类$M_p(n,\lambda,A,B)$中的充要条件是

$$F_1(z)=\frac{1}{z^{p+1}}\int_0^z t^p f(t)\mathrm{d}t$$

在$M_p(n+1,\lambda,A,B)$中.

当$A=1-2\alpha$和$B=-1$,定理2可进一步拓广为

定理4 设c是复数且$\mathrm{Re}\,c>0$,若$f(z)\in\sum_p$满足

$$\mathrm{Re}\{-e^{i\lambda}z^{p+1}(D_p^n f(z))'\}>p\cos\lambda\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{2}\mathrm{Re}\frac{1}{c}\right)\quad(z\in E),$$

则(13)定义的函数$F(z)$在类$M_p(n,\lambda,\alpha)$中.

现在讨论反问题.

定理5 设c是复数且$\mathrm{Re}\,c>0$.若$F(z)$属于$M_p(n,\lambda,\alpha)$,这里

$$\rho=\frac{\sqrt{1+|c|^2}-1}{|c|}.$$

这结果是准确的，即 ρ 不能再大.

证明 设 $F(z)\in M_p(n,\lambda,\alpha)$，则

$$-\frac{e^{i\lambda}z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}=i\sin\lambda+\cos(\alpha+(1-\alpha)\mu(z))\ (z\in E),\tag{17}$$

这里 $\mu(z)$ 在 E 内解析，$\mu(0)=1$ 且 $\mathrm{Re}\mu(z)>0\ (z\in E)$.

鉴于(14)，式(17)变成

$$-\frac{e^{i\lambda}}{p}(cD_p^n f(z)-(p+c)D_p^n F(z))=z^{-p}(i\sin\lambda+\cos\lambda(\alpha+(1-\alpha)\mu(z)),$$

上式两端微分后再用(17)导致

$$-\frac{e^{i\lambda}z^{p+1}(D_n^p f(z))'}{p}=i\sin\lambda+\alpha\cos\lambda+(1-\alpha)\cos\lambda(\mu(z)+\frac{1}{c}z\mu'(z))\ (z\in E).\tag{18}$$

借助熟知的不等式

$$|\mu'(z)|\leqslant\frac{2}{1-|z|^2}\mathrm{Re}\ \mu(z)\ (z\in E),\tag{19}$$

(18)给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{-\frac{e^{i\lambda}z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}\}&\geqslant\alpha\cos\lambda+(1-\alpha)\cos\lambda(\mathrm{Re}\mu(z)-|\frac{z\mu'(z)}{c}|)\\&\geqslant\alpha\cos\lambda+(1-\alpha)\cos\lambda(1-\frac{2|z|}{|c|(1-|z|^2)})\mathrm{Re}\mu(z)\\&>\alpha\cos\lambda.\end{aligned}$$

如果

$$|z|<\rho=\frac{\sqrt{1+|c|^2}-1}{|c|}\in(0,1).$$

其次证明半径 ρ 不能再大. 为此取 $\mu(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$，易知

$$|z\mu'(z)|=\frac{2|z|}{1-|z|^2}\mathrm{Re}\mu(z)\quad(z\in E).\tag{20}$$

设 z_0 由 $|z_0|=\rho$ 和 $\arg(\dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}-\dfrac{1+z_0}{1-z_0})=\arg c$ 确定，则有

$$\frac{1}{c}(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}-\frac{1+z_0}{1-z_0})>0$$

和

$$z_0\mu'(z_0)(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}-\frac{1+z_0}{1-z_0})^{-1}=\frac{2z_0}{(1-z_0)^2}\cdot\frac{(1-z_0)(1-\rho^2)}{2(\rho^2-z_0)}<0.$$

所以 $\dfrac{1}{c}z_0\mu'(z_0)$ 是负实数，由于这一事实与(20)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mu(z_0)+\frac{1}{c}(z_0\mu'(z_0)))&=\mathrm{Re}\mu(z_0)-|\frac{z_0\mu'(z_0)}{c}|\\&=\mathrm{Re}\mu(z_0)(1-\frac{2\rho}{|c|(1-\rho^2)})=0.\end{aligned}$$

于是(18)给出

$$\mathrm{Re}\{-\frac{e^{i\lambda}z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}\}_{z=z_0}=\alpha\cos\lambda.$$

这表明结果是准确的. 证毕.

定理 6 设 c 是正实数, $0\leqslant\alpha\leqslant\beta<1$. 若 $F(z)\in M_p(n,\lambda,\alpha)$, 则(13)确定的函数 $f(z)$ 在 $|z|<\sigma$ 内属于 $M_p(n,\lambda,\beta)$. 这里 $\sigma=\sigma(\alpha,\beta,c)$ 是方程

$$c(1+\beta-2\alpha)r^2+2(1-\alpha+c(\beta-\alpha))r-c(1-\beta)=0$$

的正根. 这结果是准确的. 证略.

4 系数估计

定理 7 设 $f(z)=z^{-p}+\sum_{m=1-p}^{\infty}a_m z^m\in M_p(n,\lambda,A,B)$. 则当 $m\geqslant 1-p$ 且 $m\neq 0$ 有准确的估计式

$$|a_m|\leqslant\frac{p(A-B)\cos\lambda}{|m|(p+m+1)^n}. \tag{21}$$

证明 (5)可写成

$$\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}+1=-(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}+B\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p})w(z),$$

这里 $w(z)=\sum_{k=1}^{\infty}w_k z^k$ 在 E 内解析且满足 $|w(z)|<1(z\in E)$. 将(4)代入上式产生

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1-p}^{\infty}(p+k+1)^n k a_k z^{p+k}\\&=-(p(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}+B\sum_{k=1-p}^{\infty}(p+k+1)^n k a_k z^{p+k})\sum_{k=1}^{\infty}w_k z^k.\end{aligned} \tag{22}$$

当 $p\neq-1$, 比较 z 的系数得

$$|a_{1-p}|=\left|\frac{w_1 p(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}}{(p-1)2^n}\right|\leqslant\frac{p(A-B)\cos\lambda}{(P-1)2^n}.$$

当 $m\geqslant 2-p$ 且 $m\neq 0$ 时, 对适当的复数 $c_k(k\geqslant m+1)$ (22)可表成形式

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1-p}^{m}(p+k+1)^n k a_k z^{p+k}+\sum_{k=m+1}^{\infty}c_k z^{p+k}\\&=-(p(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}+B\sum_{k=1-p}^{m-1}(p+k+1)^n k a_k z^{p+k})(\sum_{k=1}^{\infty}w_k z^k)\quad(z\in E)\end{aligned} \tag{23}$$

注意 $|w(z)|<1(z\in E)$, 依靠熟知的 Parseval 等式, 对于 $|z|=r<1$, 从(23)得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1-p}^{m}(p+k+1)^{2n}k^2|a_k|^2 r^{2(p+k)}+\sum_{k=m+1}^{\infty}|c_k|^2 r^{2(p+k)}\\&\leqslant p^2(A-B)^2\cos^2\lambda+B^2\sum_{k=1-p}^{m-1}(p+k+1)^{2n}k^2|a_k|^2 r^{2(p+k)}\\&\leqslant p^2(A-B)^2\cos^2\lambda+\sum_{k=1-p}^{m-1}(p+k+1)^{2n}k^2|a_k|^2.\end{aligned}$$

上式中令 $r\to 1$ 有

$$\sum_{k=1-p}^{m}(p+k+1)^{2n}k^2|a_k|^2\leqslant p^2(A-B)^2\cos^2\lambda+\sum_{k=1-p}^{m-1}(p+k+1)^{2n}k^2|a_k|^2.$$

由此即得(21).

估计式(21)是准确的.因为由

$$-\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}=\frac{1+(B+(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda})z^{p+m}}{1+Bz^{p+m}}$$

确定的函数 $f(z)\in M_p(n,\lambda,A,B)$,它在 E_0 内有展开式

$$f(z)=z^{-p}-\frac{p(A-B)\cos\lambda e^{-i\lambda}}{m(p+n+1)^n}z^m+\cdots,$$

这里 $m\geqslant 1-p$ 且 $m\neq 0$. 定理证毕.

5 卷积性质

最后导出一个与卷积有关的性质

定理 8 设 $f(z)=z^{-p}+\sum\limits_{m=1-p}^{\infty}a_m z^m$ 与 $g(z)=z^{-p}+\sum\limits_{m=1-p}^{\infty}b_m z^m$ 在类 $M_p(n,\lambda,A,B)$ 中,则当 $|B|+(A-B)\cos\lambda\leqslant 1$ 时函数

$$h(z)=z^{-p}+\sum_{m=1-p}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)(p+m+1)^n a_m b_m z^m$$

也在 $M_p(n,\lambda,A,B)$ 中.

证明 对于 $f(z)\in M_p(n,\lambda,A,B)$,由引理 1,函数

$$\varphi(z)=\frac{z^{p+1}(D_p^n f(z))'}{p}+a=a-1+\sum_{m=1-p}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)(p+m+1)^n a_m z^{p+m}$$

在 E 内解析且满足 $|\varphi(z)|<b$ $(z\in E)$,因此

$$|a-1|^2+\sum_{m=1-p}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^2(p+m+1)^{2n}|a_m|^2\leqslant b^2,$$

即

$$\sum_{m=1-p}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^2(p+m+1)^{2n}|a_m|^2\leqslant\frac{(A-B)^2\cos^2\lambda}{1-B^2}. \tag{24}$$

对于 $g(z)\in M_p(n,\lambda,A,B)$,同样有

$$\sum_{m=1-p}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^2(p+m+1)^{2n}|b_m|^2\leqslant\frac{(A-B)^2\cos^2\lambda}{1-B^2}. \tag{25}$$

当 $z\in E$ 和 $|B|+(A-B)\cos\lambda\leqslant 1$,应用 Cauchy-Schwarz 不等式,从(24)和(25)得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{z^{p+1}(D_p^n h(z))'}{p}\right|+a\\
&=\left|a-1+\sum_{m=1-p}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^2(p+m+1)^{2n}a_m b_m z^{p+m}\right|\\
&\leqslant|a-1|+\left(\sum_{m=1-p}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^2(p+m+1)^{2n}|a_m|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1-p}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^2(p+m+1)^{2n}|b_m|^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant|a-1|+\frac{(A-B)^2\cos^2\lambda}{1-B^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(A-B)\cos\lambda}{1-B^2}(|B| + (A-B)\cos\lambda) \leqslant b.$$

因此，根据引理 1，$h(z)\in M_p(n,\lambda,A,B)$.

参考文献：

[1] ROYSTER W C. *Meromorphic starlike multivalent functions, Trans* [J]. Amer. Math. Soc., 1963, **107**: 300—308.

[2] MILLER J E. *Convex meromorphic mapping and related functions* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **25**: 220—228.

[3] MOGRA M L. *Meromorphic multivalent functions with positive coefficients II* [J]. Math. Japonica, 1990, **35**: 1089—1098.

[4] URALEGADDI B A and SOMANATHA C. *New criteria for meromorphic starlike univalent functions* [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1991, **43**: 137—140.

[5] KIM Y C, LEE S H and OWA S. *On certain meromorphic functions with positive coefficients* [J]. Internat. J. Math. and Math. Sci., 1993, **16**: 409—412.

[6] CHO N E and KIM J A. *On certain classes of meromorphically starlike functions* [J]. Internat, J. Math. and Math. Sci., 1995, **18**: 463—468.

[7] YANG Ding-gong. *On a class of meromorphic starlike multivalent functions* [J]. Bull. Inst. Math. Academia Sinica, 1996, **24**: 151—157.

[8] FLETT T M. *The dual of an inequality of Hardy and some related inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1972, **38**: 746—765.

[9] JAKE I S. *Functions starlike and convex of order α* [J]. J. London Math. Soc., 1971, **3**(2): 469—474.

On Subclasses of Meromorphically Multivalent Functions

XU Neng[1], YANG Ding-gong[2]

(1. Dept. of Math., Changshu College, 215500, China; 2. Dept. of Math., Suzhou University, 215006, China)

Abstract: A new class $M_p(n,\lambda,A,B)(p\in N, n\in N\cup\{0\}, -1\leqslant B<A\leqslant 1, -\frac{\pi}{2}<\lambda<\frac{\pi}{2})$ consisting of meromorphically multivalent functions in the unit disc is introduced. It is proved that $M_p(n+1,\lambda,A,B)\subset M_p(n,\lambda,A,B)$. Integral transforms for functions in the class $M_p(n,\lambda,A,B)$ are studied. sharp coefficient estimates and a related convolution theorem are also obtained.

Key words: multivalent; meromorphic; integral; subordination.