第20卷第3期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 3
2000年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2000

一类亚纯函数的奇异方向*

李 纯 红
(四川师范学院数学系，南充 637002)

摘 要：本文证明了一类亚纯函数在涉及微分多项式 $F(z)=f^{(k)}(z)+\sum_{j=1}^{n}a_jf^j(z)$ 且具有重值情况下的奇异方向的存在性，解决了顾永兴的一个猜测.

关键词：亚纯函数；微分多项式；重值；奇异方向.
分类号：AMS(1991) 30D/CLC O174.52
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)03-0389-07

1 引言及主要结果

对于满足

$$\varlimsup_{r\to+\infty}T(r,f)/(\log r)^3=+\infty \tag{0}$$

的一类亚纯函数，1982年，[1]证明了存在 $\theta_0\in[0,2\pi)$，使得对任意 $\varepsilon>0$，任意正整数 k，任意 $a,b\in C(b\neq0)$ 有：

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=b)\}=+\infty. \tag{1}$$

1987年，[2]改进了上述结果，证明了在条件(0)下，(1)可以加强为

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=b)\}/(\log r)^2=+\infty.$$

随后[3]，[4]还推广了这一结果.

1990年，[5]还考虑重值与如下形式的微分多项式

$$F(z)=f^{(k)}(z)+\sum_{j=1}^{n}a_jf^j(z)=f^{(k)}(z)+p_n(f), \tag{2}$$

其中 $a_j\in C(j=1,2,\cdots,n)$. 证明了在条件(0)下，(1)可以推广为

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n_{l)}(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=b)\}=+\infty, \tag{3}$$

其中 k,l,n 为满足

$$k>n,\quad l>3+3k+2n(n+1) \tag{4}$$

的三个正整数，a,b 为满足

$$a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a\neq b \tag{5}$$

* 收稿日期：1997-03-26
作者简介：李纯红(1963-)，男，四川省达县人，硕士，四川师范学院副教授.

的有穷复数.

随后顾永兴猜测在条件(0)下,(3)可以加强为

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n_{l)}(r,\theta_0,\varepsilon,f=b)\}/(\log r)^2=+\infty. \tag{6}$$

本文的目的在于证实这一猜测,得到

定理 设$f(z)$是满足条件(0)的亚纯函数,$F(z)$为(2)所定义,则存在$\theta_0\in[0,2\pi)$,使得对任意$\varepsilon>0$,满足(4)的三个正整数k,l,n,满足(5)的有穷复数a,b,均有(6)式成立.

2 若干引理

引理1 设$f(z)$是$|z|<R(0<R<+\infty)$上的亚纯函数,k,l,n为满足(4)的三个正整数,$F(z)$为(2)式所定义,令$g(z)=(F'(z))^{k+1}/(F(z)-1)^{k+2}$,且假定$f(0)\neq 0,\infty,F(0)\neq 1,F'(0)\neq 0,g'(0)\neq 0$,那么,对于$0<r<R$有

$$T(r,f)<C_{k,l,n}\{N(r,1/f)+\overline{N}_{l)}(r,1/(F-1))\}+s(r,f),$$

其中

$$\begin{aligned}s(r,f)=C_{k,l,n}\{&1+\log^+R+\log^+1/R+\log 2R/(R-r)+\log^+|f(0)|+\log^+|F(0)|+\\&\log^+|F(0)-1|+\log^+\log^+1/|F'(0)|+\\&\log^+|1/((k+1)F''(0)(F(0)-1)-(k+2)(F'(0))^2)|,\end{aligned}$$

其中$C_{k,l,n}$为依赖于k,l,n的正常数,不同地方出现者可以不一样.

证明 由文献[6]中定理1及其证明有

$$T(r,f)\leqslant 3N(r,1/f)+4\overline{N}(r,1/(F-1))-2N_0(r,1/F')+S_1(r,f), \tag{7}$$

$$\overline{N}(r,f)\leqslant 2N(r,1/f)+3\overline{N}(r,1/(F-1))-N_0(r,1/F')+S_2(r,f). \tag{8}$$

若记$\alpha=\sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_j|$,上式中

$$\begin{aligned}S_1(r,f)=&3m(r,f'/f)+3m(r,f^{(k)}/f)+3m(r,f^{(k+1)}/f)+4m(r,F'/(F-1))+\\&3\log|f(0)(F(0)-1)/F'(0)|+4\log(k+2)+3\log^+\alpha+\\&10\log 2+\log|g(0)/g'(0)|,\\S_2(r,f)=&2m(r,f'/f)+2m(r,f^{(k)}/f)+2m(r,f^{(k+1)}/f)+2m(r,F'/F)+\\&m(r,g'/g)+2\log|f(0)(F(0)-1)/F'(0)|+4\log^+\alpha+2\log n+2\log 6.\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,1/(F-1))\leqslant& l\overline{N}_{l)}(r,1/(F-1))/(l+1)+\{T(r,F)+\\&\log 2+\log 1/|F(0)-1|\}/(l+1),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}T(r,F)\leqslant&(n(n+1)/2+1)T(r,f)+k\overline{N}(r,f)+m(r,f^{(k)}/f)+\\&\sum_{j=1}^{n}\log^+|\alpha_j|+\log(n+1),\end{aligned} \tag{10}$$

先将(7),(8)代入(10)可得$T(r,F)$的估计,再将此估计代入(9)并注意条件(4),化简可得$\overline{N}(r,1/(F-1))$的估计,再将此估计代入(7)式可得:

$$\begin{aligned}T(r,f)<&(3+(6+3n(n+1)+4k)/2(l+1)\Delta)N(r,1/f)+\\&4l\overline{N}_{l)}(r,1/(F-1))/(l+1)\Delta+S_3(r,f),\end{aligned}$$

其中记 $\Delta=1-(4+2n(n+1)+3k)/(l+1)(>0)$

$$S_3(r,f)=((2+n(n+1))/(l+1)\Delta+1)S_1(r,f)+kS_2(r,f)/(l+1)\Delta+$$
$$(m(r,f^{(k)}/f)+\sum_{j=1}^{n}\log^+|\alpha_j|+\log(n+1)+$$
$$\log 2+\log 1/|F(0)-1|)/(l+1)\Delta.$$

最后主要是处理 $S_3(r,f)$. 首先利用 $g(z)$之表达式改进 $S_1(r,f)$与 $S_2(r,f)$，再利用[7]中引理 2.2、引理 2.3、引理 2.4 和对数导数基本引理及其推广形式([7]中引理 1.3)及引理 4.3)可完成证明.

引理 2 设 $f(z)$在 $|Z|\leqslant 1$ 上的亚纯函数，k,l,n 是满足(4)的三个正整数，且 $n-1$ 不能整除 k，记 $N''=n(1,f=0)+n(1,f=\infty)$，$(\gamma_0)$是 N''个半径为 $1/512N''$的除外圆，当 z 不属于(γ_0)时有 $|f^{(k)}(z)/f(z)|\leqslant M$($M$ 为某正常数)，又令 $F(z)$为(2)式所定义，且其中 $\alpha_n\neq 0$，$\alpha=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|$，记 $N=n(1,f=0)+n_{l)}(1,F=1)$，又设 k 是满足

$$|\alpha_n|K^{n-1}\geqslant 2(M+|\alpha_{n-1}|K^{n-2}+\cdots+|\alpha_1|),K>1,|\alpha_n|K^n/2>1$$

的正数，那么，对任意 $a\in C$ 有

$$n(1/32,f=a)\leqslant C_k\{N+\log^+N''+1+\log^+\alpha+\log K+\log^+\log^+|f(z_0)|+\log 1/|f(z^*),a|\},$$

其中 z^* 是$|z|=1$ 上一点(与 a 无关)，z_0 满足

$$|z_0|<1/32,\prod_{s=1}^{N''}|z_0-\tau_s|\geqslant(1/1024\mathrm{e})^{N''},$$

其中 $\tau_s(s=1,2,\cdots,N')$是 $f(z)$在$|z|\leqslant 3/64$ 上的极点.

证明 设在$|z|<1$ 内 $f(z)$的零点为 $\alpha_s(s=1,2,\cdots,n(1,1/f)=N_1)$，$F(z)-1$ 的重级$\leqslant l$的零点为 $\beta_t(t=1,2,\cdots,n_{l)}(1,1/(F-1))=N_2)$. 取 $h=1/1024\mathrm{e}$，根据 Boutroux-Cartan 定理，对任意 $z\in C$ 有

$$\prod_{s=1}^{N_1}|z-\alpha_s|>h^{N_1},\quad \prod_{t=1}^{N_2}|z-\beta_t|>h^{N_2}.$$

至多除去 $N_1+N_2<N$ 个小圆之后全体记为(γ)，其半径总和$\leqslant 4\mathrm{e}h=1/256$，令 $H=1/512N$，于是存在 z_0 满足 $-1/256<z_0<1/256$，$z_0\in(\gamma)$，$f(z_0)\neq\infty$，及 $\rho\in(25/512,1/16)$，$(|z-z_0|=\rho)\cap(\gamma)=\varnothing$.

分以下几种情况讨论

(1) 在 $D:\rho-H/4\leqslant|z-z_0|\leqslant\rho+H/4$ 上一致地有

$$|f|+|F|+|F'|\geqslant 1/32,$$

则在 D 上恒有

$$1/|f|\leqslant 32\{1+|F/f|+|F'/f|\}$$
$$\leqslant 32\{|f^{(k)}/f|+|f^{(k+1)}/f|+1+\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j||f|^{j-1}+|f'/f|\sum_{j=1}^{n}j|\alpha_j|f|^{j-1}\}.$$

由此应用对数导数基本引理及其推论[7]可得任意 $r\in(\rho-H/4,\rho+H/4)$有

$$m(r,z_0,1/f)<c\{1+\log^+r'+\log^+1/r+\log^+\alpha+\log^+\log^+1/|f(z_0)|+$$
$$\log 1/(r'-r)+\log^+T(r',z_0,f)\}(\rho-H/4<r<r'<\rho+H/4).$$

又 $N(r,z_0,1/f)<N_1\log 1/h<N\log(1024e)$，结合于[7]中引理 2.4 可得

$$T(r,z_0,1/f)=m(r,z_0,1/f)+N(r,z_0,1/f)<C\{1+N+\log^+\alpha+\log^+\log 1^+ 1/|f(z_0)|+\log^+\log^+|f(z_0)|+\log^+1/(\rho+H/4-r)\}.$$

让 $r\to\rho-H/4$，得

$$T(\rho-H/4,z_0,1/f)<C\{1+N+\log^+\alpha+\log^+\log^+1/|f(z_0)|+\log^+\log^+|f(z_0)|+\log(N+N_2)\}.$$

注意 $\{|z|\leqslant 1/32\}\subset\{|z-z_0|<3(\rho-h/4)/4\}$，于是对任意 $z\in C$ 有

$$n(1/32,f=a)\leqslant n(3(\rho-3/4)/4,z_0,f=a)\leqslant N(\rho-H/4,z_0,1/(f-a))/\log(4/3)$$
$$<C\{1+N+\log(N+N_2)+\log^+\alpha+\log^+|f(z_0)|+\log 1/|f(z_0),a|\}.$$

(2) 存在 $z_1\in D$，使得

$$|f(z_1)|+|F(z_1)|+|F'(z_1)|<1/32.$$

又分两种情形

(2.1) 于 Γ：$|z-z_0|=|z_1-z_0|$ 上有点 z_2 使得 $|f(z_2)|>K$，把 Γ 上连接 z_1 与 z_2 的较短的弧记作 $\widehat{z_1z_2}$，其长度 $<\pi|z_1-z_0|<\pi(\rho+H/4)\leqslant\pi(1/16+1/4\times 512N)<10/32$，存在 $z_3\in\widehat{z_1z_2}$，使得 $|f(z_3)|=K$ 而 $|f(z)|\leqslant K,z\in\widehat{z_1z_3}$. 注意到 $z_3\overline{\in}(\gamma_0)$ 及关于 K 的假定可得 $|F(z_3)|\geqslant|\alpha_n|K^n/2>1$，所以存在 $z_4\in\widehat{z_1z_3}$，使得 $|F(z_4)|=1/32$，而 $|F(z)|\leqslant 1/32(z\in\widehat{z_1z_4})$，$\widehat{z_1z_4}$ 之长度 $<10/32$，由

$$|F(z_4)|-|F(z_1)|\leqslant|F(z_4)-F(z_1)|\leqslant\int_{z_1}^{z_4}|F'(z)||dz|\leqslant(10/32)\max_{z\in\widehat{z_1z_4}}|F'(z)|,$$

得 $\max\limits_{z\in\widehat{z_1z_4}}|F'(z)|>1$，即存在 $z_5\in\widehat{z_1z_4}$，使得 $|F'(z_5)|=11/32$，而 $|F'(z)|\leqslant 1/32(z\in\widehat{z_1z_5})$. 又 $11/32-1/32\leqslant|F'(z_5)-F'(z_1)|\leqslant\int_{z_1}^{z_5}|F'(z)||dz|<(10/32)\max\limits_{z\in\widehat{z_1z_5}}|F''(z)|$，得 $\max\limits_{z\in\widehat{z_1z_5}}|F''(z)|>1$.

若 $|F''(z_5)|\geqslant 1$，则令 $z^*=z_5$，否则存在 $z^*\in\widehat{z_1z_5}$，使得 $|F''(z^*)|=1$，而 $|F''(z^*)|\leqslant 1(z\in\widehat{z_1z^*})$ 于此 z^* 有

$$0<|f(z^*)|<K,\ |F(z^*)|\leqslant 11/32,\ |F'(z^*)|\leqslant 11/32,\ |F''(z^*)|\geqslant 1$$
$$|F'(z^*)|\geqslant|F'(z_5)|-\int_{z_5}^{z^*}|F''(z)||dz|>1/32$$
$$|(K+1)F''(z^*)(F(z^*)-1)-(K+2)(F'(z^*))^2|>2.$$

在 $|u|\leqslant 3/16$ 上，对函数

$$q(u)=f(z^*+u),\quad Q(u)=q^{(k)}(u)+\alpha_n q^n(u)+\cdots+\alpha_1 q(u).$$

应用引理 1，并注意到上面的估计得，对任意 $a\in C$ 有

$$n(1/32,f=a)\leqslant C\{N+1+\log^+\alpha+\log K+\log 1/|f(z^*),a|\}.$$

(2.2) 在 Γ 上恒有 $|f(z)|\leqslant K$，此时又分两种情况

(2.2.1) 存在 $z_2\in\Gamma$，使得 $|F(z_2)|>11/32$.

把 Γ 上连接 z_1 与 z_2 的较短的弧记为 $\widehat{z_1z_2}$，其长度 $<\pi r<10/32$，存在 $z_3\in\widehat{z_1z_2}$ 使得 $|F(z_3)|$

$=11/32$，而 $|F(z)|\leqslant 11/32$，$(z\in \widehat{z_1z_3})$，$\widehat{z_1z_3}$ 之长度 $<10/32$，同(2.1)一样可得结论.

(2.2.2) 在 Γ 上恒有 $|F(z)|\leqslant 11/32$，此时又分两种情况.

(2.2.2.1) 存在 $z_2\in\Gamma$，使得 $|F'(z_2)|>11/32$，此时仍和(2.1)一样推导可得结论.

(2.2.2.2) 在 Γ 上恒有 $|F'(z)|\leqslant 11/32$，此时在 Γ 上恒有

$$|F'(z)/(F(z)-1)|\leqslant(11/32)(1-11/32)=11/21.$$

从而应用幅角原理有

$$|n(|z_1-z_0|,z_0,F)-n(|z_1-z_0|,z_0,1/(F-1))|$$

$$=\left|\int_{|z-z_0|=|z_1-z_0|}F'(z)/(F(z)-1)\mathrm{d}z\right|/2\pi<1.$$

于是有 $n(|z_1-z_0|,z_0,F)=n(|z_1-z_0|,z_0,1/(F-1))$. 因为 $n-1$ 不能整除 k，并且 $a_0\neq 0$，所以，$f(z)$ 的极点必是 $F(z)$ 的级为 $\max\{\lambda N,\lambda+k\}$ 的极点，从而

$$n(|z_1-z_0|,z_0,f)\leqslant n(|z_1-z_0|,z_0,1/(F-1))<N,$$

进而可得 $N(|z_1-z_0|,z_0,f)\leqslant N\log(512e)$. 结合于 $m(|z_1-z_0|,z_0,f)\leqslant\log k$，易得结论成立.

3 定理的证明

由(0)，存在(θ_0)：$\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，使得对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}(T(r,\theta_0,\varepsilon,f)/(\log r)^3=+\infty, \tag{11}$$

则(θ_0)便具有定理所述性质.

否则，存在 n,k,l 满足(3)，γ,β 满足 $a_n\gamma^n+\cdots+a_1\gamma\neq\beta(\beta\neq 0)$，$\varepsilon>0$，使得有充分大的 r 有

$$n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\gamma)+n_{l)}(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}+p_n(f)=\beta)=O((\log r)^2).$$

令 $\varphi=f-\gamma$，$f^{(k)}+p_n(f)=\varphi^{(k)}+Q_n(\varphi)+p_n(\gamma)$，其中 Q_n 是一个 n 次多项式但无常数项，令 $\beta'=\beta-p_n(\gamma)$，$\psi=\varphi/\beta'$，则 $f^{(k)}+p_n(f)=\beta$ 等价于 $\psi^{(k)}+R_n(\psi)=1$，其中 $R_n(x)=Q_n(\beta'x)/\beta'$，从而有

$$n(r,\theta_0,\varepsilon,\psi=0)+n_{l)}(r,\theta_0,\varepsilon,\psi^{(k)}+R_n(\psi)=1)=O((\log r)^2).$$

设 $\eta=\sin(\varepsilon/2)/16$，对 $\lambda=1,2,\cdots$，令

$$D_\lambda:(1+\eta)^{\lambda-1}\leqslant|z|\leqslant(1+\eta)^\lambda,\ |\arg z-\theta_0|\leqslant\eta/2,\ z_\lambda=(1+\eta)^{\lambda-1}(1+\eta/2)\exp(i\theta_0)$$

$$k_\lambda:|z-z_\lambda|\leqslant\eta|z_\lambda|,\ k'_\lambda:|z-z_\lambda|\leqslant 16\eta|z_\lambda|,\ k''_\lambda:|z-z_\lambda|\leqslant 3\eta|z_\lambda|/2,$$

则 $D_\lambda\subset k''_\lambda\subset k'_\lambda\subset\{|\arg z-\theta_0|\leqslant\varepsilon/2\}$.

又设 $g_\lambda(z)=(16\eta(|z_\lambda|)^{-k}\psi(z_\lambda+16\eta|z_\lambda|z)$，$\lambda=1,2,\cdots$，则

$$g_\lambda^{(k)}+R_n[(16\eta|z_\lambda|)^k g_\lambda(z)]=\psi^{(k)}(z_\lambda+16\eta|z_\lambda|z)+R_n(\psi(z_\lambda+16\eta|z_\lambda|z)).$$

又令 $S_{n_\lambda}(x)=R_n((16\eta|z_\lambda|)^k x)$，则

$$n(1,g_\lambda=0)+n_{l)}(1,g_\lambda^{(k)}+S_{n_\lambda}(g_\lambda)=1)=n(k'_\lambda,\psi=0)+n_{l)}(k'_\lambda,\psi^{(k)}+R_n(\psi)=1).$$

下面估计 $|g_\lambda^{(k)}/g_\lambda|$.

设 λ 充分大，令 $N_\lambda=n(2|z_\lambda|,\psi=0)+n(2|z_\lambda|,\psi=\infty)$，并以 ψ 在 $|z|\leqslant 2|z_\lambda|$ 上的每一个零点和极点为中心作半径是 $32\eta|z_\lambda|/512(N_\lambda+1)$ 的圆，全体记为$(\Gamma_{0\lambda})$，则由文献[8]中引理 3

可知，对任意 $z\in k'_\lambda\backslash(\Gamma_{0\lambda})$，有

$$\log^+|\psi^{(k)}(z)/\psi(z)|<C\{1+\log 2|z_\lambda|+\log^+1/(2-32\eta)|z_\lambda|+\log^+N_\lambda+\log^+512(N_\lambda+1)/32\eta|z_\lambda|+\log^+T(2|z_\lambda|,\psi)+\log^+\log^+1/|C_\tau|\},$$

其中 C_τ 是 $\psi(z)$ 在原点的展开式的第一个非零系数，因为 λ 充分大，由此可得

$$|\psi^{(k)}/\psi|\leqslant|z_\lambda|^{c_{k,\rho}}\quad(z\in k'_\lambda\backslash(\Gamma_{0\lambda})).$$

因为有 $N_\lambda<|z_\lambda|^{\rho+1}$，令 $h(z)=(z-z_\lambda)/32\eta|z_\lambda|$，及 $(\gamma_{0\lambda})=h(\Gamma_{0\lambda})$，则 $(\gamma_{0\lambda})$ 是由 N_λ 个直径为 $1/256(N_\lambda+1)$ 的圆所组成，且当 $|z|\leqslant 1,z\in(\gamma_{0\lambda})$ 时有

$$|g_\lambda^{(k)}(z)/g(z)|\leqslant(32\eta|z_\lambda|)^k|z_\lambda|^{c_{k,\rho}}.$$

设 $S_{n_\lambda}(x)=(32\eta|z_\lambda|)^{kn}a'_nx^n+(32\eta|z_\lambda|)^{k(n-1)}a'_{n-1}x^{n-1}+\cdots+(32\eta|z_\lambda|)^ka'_1x$，取

$$M_\lambda=(32\eta|z_\lambda|)^k|z_\lambda|^{c_{k,\rho}},\Gamma_\lambda=\exp(|z_\lambda|^{\rho-\delta}),$$

其中 $\rho=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\log T(r,f)/\log r(0\leqslant\rho+\infty)$，则当 λ 充分大时有

$$|a'_n|(32\eta|z_\lambda|)^{kn}\Gamma_\lambda^{n-1}\geqslant 2\{(32\eta|z_\lambda|)^k|z_\lambda|^{c_{k,\rho}}+|a'_{n-1}|(32\eta|z_\lambda|)^{k(n-1)}\Gamma_\lambda^{n-2}+\cdots+|a_1|(32\eta|z_\lambda|)^k\}.$$

于是把引理 2 应用于 $f=g_\lambda^{(k)}+S_{n_\lambda}(g_\lambda)$ 有

$$\begin{aligned}n(k_\lambda,g=a)\leqslant C\{&n(k'_\lambda,\psi=0)+n_{(1)}(k'_\lambda,\psi^{(k)}+R_n(\psi)=1)+1+\log^+N_\lambda+\\&\log^+\sum_{j=1}^n|a'_j|(32\eta|z_\lambda|)^{kj}+\log\Gamma_\lambda+\log^+\log^+|g_\lambda(z_{0\lambda})|+\\&\log 1/|g_\lambda(z_\lambda^*),(32\eta|z_\lambda|)^{-k\lambda}|\},\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $|z_{0\lambda}|<1/32$，

$$\prod_{s=1}^{n(k''_\lambda,\psi=\infty)}|z_{0\lambda}-(\tau_s-z_\lambda)/32\eta|z_\lambda||\geqslant(1/512\mathrm{e})^{n(k''_\lambda,\psi=\infty)}.$$

这里 $\tau_s(s=1,2,\cdots,n(k''_\lambda,\psi=\infty))$ 是 ψ 在 k''_λ 上的极点.

下面估计(12)式右端各项

$$n(k'_\lambda,\psi=0)+n_{(1)}(k''_\lambda,\psi^{(k)}+R_n(\psi)=1)<O((\log|z_\lambda|)^2),$$

$$\log^+N_\lambda+\log^+\sum_{j=1}^n|a'_j|(32\eta|z_\lambda|)^{kj}=O(\log|z_\lambda|),\quad\log k_\lambda=O(\log|z_\lambda|)$$

令 $\omega_\lambda=(32\eta|z_\lambda|)^kg_\lambda(z_\lambda^*)$，则

$$\log 1/|g_\lambda(z_\lambda^*),(32\eta|z_\lambda|)^{-k\lambda}|\leqslant\log 1/|\omega_\lambda,a|+O(\log|z_\lambda|).$$

为了估计 $\log^+\log^+|g_\lambda(z_{0\lambda})|$，令 $z_\lambda+32\eta|z_{0\lambda}|=z'_{0\lambda}\in k_\lambda$，再令 $\tau_\upsilon(\upsilon=1,2,\cdots,n(3|z_\lambda|,\psi=\infty))$ 为 ψ 在 $|z|\leqslant 3|z_\lambda|$ 上的极点，由 Poisson-Jensen 公式可得到：

$$\log^+|g_\lambda(z_{0\lambda})|\leqslant\log^+|\psi(z'_{0\lambda})|\leqslant 5T(3|z_\lambda|,\psi)+n(3|z_\lambda|,\psi=\infty)\log 6|z_\lambda|+n(k''_\lambda,\psi=\infty)\log(1024\mathrm{e})=O(|z_\lambda|^{\rho+1}),$$

则 $\log^+\log^+|g_\lambda(z_{0\lambda})=O(\log|z_{0\lambda}|)$.

把以上估计式代入(12)式得到 $n(k_\lambda,\psi=a)\leqslant C\log 1/|\omega_\lambda,a|+O((\log|z_\lambda|)^2)$

随后应用文献[9]之定理 Ⅵ 的结果：

$$\frac{1}{\pi}\iint_{k_\lambda}|f'(z)|^2/(1+|f(z)|^2)^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\iint_{k_\lambda}n(D_\lambda,f=a)\mathrm{d}\omega(a)\ (z=r\exp(i\theta)).$$

再仿文献[4]中定理1的类似推导方法可得 $T(r,\theta_0,\eta/2,f)=O((\log r)^3)$. 此与(11)式矛盾. 至此定理得证.

参考文献:

[1] YANG Lo. *Meromorphic functions and their derivatives* [J]. J. London Math. Soc., 1982, **25**: 288—296.

[2] 陈怀惠. 对应于 Hayman 不等式的零级亚纯正数的奇异方向 [J]. 数学学报, 1987, **2**: 234—237.

[3] 杨明泽、王平. 一类亚纯函数的正规定则与奇异方向 [J]. 华中师大学报(自然科学版), 1990, **2**: 147—150.

[4] 柏盛桄、李纯红. 关于整函数和亚纯函数的奇异方向 [J]. 华中师大学报(自然科学版), 1989, **1**: 167—173.

[5] 李纯红. 微分多项式具有重值的亚纯函数的奇异方向 [J]. 四川师院学报(自然科学版), 1993, **1**: 7—15.

[6] 陈怀惠. 一个正规定则 [J]. 南京师大学报(自然科学版), 1984, **4**: 1—9.

[7] 杨 乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京:科学出版社, 1982.

[8] 陈怀惠. 一个基本不等式及相应的奇异方向 [J]. 数学年刊(A辑), 1986, **3**: 241—249.

[9] Tusji. *Postential theory in modern function theory* [M]. Maruage Tokyo, 1959.

[10] 顺永兴. 亚纯函数的正规族 [M]. 成都:四川教育出版社, 1991.

The Singular Direction of a Class of Meromorphic Function

LI Chun-hong

(Dept. of Math., Sichuan Teachers' College, Nanchong 637002, China)

Abstract: This present paper proves the existence of singular direction of a clss of meromorphic functions with defferentia polynomial $F(z)=f^{(k)}(z)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f^j(z)$ and multiple values, which solves Gu Yongxing's conjecture.

Key words: meromorphic function; differential polynimial; multiple value; singular direction.