第20卷第3期 数学研究与评论 Vol.20 No.3
2000年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug.2000

一类多维非线性渗流方程解的有限传播性质*

李海峰， 陈金环
（郑州纺织工学院，450007）

摘 要：本文讨论具有强非线性源与对流项的渗流方程，利用其解的 Harnack 不等式得到弱解的具有限传播速度的性质或正解分界面的存在性与增长性.

关键词：多孔介质方程；非线性源；对流；非负弱解；Harnack 不等式；分界面.
分类号：AMS(1991) 35K65/CLC O175.26
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)03-0406-05

1 引 言

本文考虑具有强非线性源与对流项的较一般的多孔介质方程

$$u_t - \Delta u^m + b(x,t,u)\cdot Du = u^p, x \in R^N, t > 0 \tag{1.1}$$

的正解 $u(x,t)$ 的分界面或自由边界的存在性与增长性.

记 $Q_T = R^N \times (0,T]$，T 为某一正数；$Q = R^N \times (0,\infty)$；对 $\tau > 0$，$Q_\tau = R^N \times (\tau,\infty)$，$\Omega = \{(x,t) \in Q \mid u(x,t) > 0\}$，$\Omega(t) = \{x \in R^N \mid u(x,t) > 0\}$. 若 $t > 0$，$\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$ 表示 Ω 在 R^N 中的边界. $\Gamma = \partial\Omega$ 表示 Ω 在 Q 中的边界，称为解 u 的分界面或自由边界.

在文[3][4]中讨论了同时具有强非线性源与对流项的渗流方程正解的存在性、Harnack 不等式和初始迹问题，本文是[3]，[4]的继续，用新的方法集中研究方程(1.1)弱解的分界面的存在性和增长性.

设向量值函数 $b(x,t,u)$ 可微，其分量 $b^i(x,t,u)$ 满足

$$|b^i(x,t,u)| \leqslant \Lambda_1 u^{\frac{m-1}{2}}, \left|\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b^i}{\partial x^i}\right| \leqslant \Lambda_1, \tag{1.2}$$

其中 Λ_1 为某一正的常数.

方程(1.1)的弱解如通常那样定义.

对于 $v \in L_{loc}(R^N)$ 或 R^N 中的 Radon 测度 μ，使用下列记号($\forall\, r > 0$)：

$$|||v|||_r = \sup_{\rho \geqslant r} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \fint_{B_\rho} v\,dx, \quad |||v|||_{\infty r} = \sup_{\rho \geqslant r} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \int_{B_\rho} v\,dx, \tag{1.3}$$

$$|||\mu|||_r = \sup_{\rho \geqslant r} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \cdot \frac{\mu(B_\rho)}{|B_\rho|}, \quad |||\mu|||_{\infty r} = \sup_{\rho \geqslant r} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \mu(B_\rho), \tag{1.4}$$

* 收稿日期：1997-08-27；修订日期：1999-05-24
基金项目：国家自然科学基金和河南省教委自然科学基础研究项目(10671075)
作者简介：李海峰(1944-)，男，教授.

其中 $B_\rho=\{|x|<\rho\}$，$|B_\rho|$表示 B_ρ 的体积，而

$$\fint_{B\rho} v\mathrm{d}x=\frac{1}{|B_\rho|}\int_{B\rho} v\mathrm{d}x.$$

关于方程(1.1)以 R^N 中某一 Radon 测度 μ 为初始迹或 $u_0(x)\in L^1(R^N)\cap L^\infty(R^N)$ 为初值的 Cauchy 问题弱解的存在性，我们已得到的结果主要是：

(i) 满足(1.2)的方程(1.1)，当

$$p>1 \text{ 与 } m>\max\left\{\frac{2}{N}\sqrt{p}+1,\frac{2}{N}(p-1)+p\right\} \tag{1.5}$$

成立时，对于使得$|||\mu|||_{\infty}<\infty$的在 R^N 中给定的 Radon 测度 μ 和 $T^*=T^*(\mu)=\min\{T,\frac{1}{C_1|||\mu|||_r^{m-1}}\}$，其 Cauchy 问题的弱解 $u(x,t)$存在，且对 $0<t<T^*(\mu)$满足如下估计：

$$|||u(\cdot,t)|||_r\leqslant C_2|||\mu|||_r, \tag{1.6}$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_r)}\leqslant C_3t^{-\frac{N}{\lambda}}r^{\frac{2}{m-1}}|||\mu|||_r^{\frac{2}{\lambda}}, \tag{1.7}$$

$$\int_0^t\int_{Br}u^{m-1}|Du|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C_4r^{1+\frac{\lambda}{m-1}}t^{\frac{1}{\lambda}}|||\mu|||_r^{1+\frac{m-1}{\lambda}}+C_4t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}}|||\mu|||_r^{\frac{m-1}{\lambda}}|||\mu|||_{\infty}, \tag{1.8}$$

其中 $\lambda=N(m-1)+2$. 当 μ 由

$$u_0\in L^1(R^N)\cap L^\infty(R^N) \tag{1.9}$$

代替时，上述结论仍然成立.

(ii) 设条件(1.2)满足且(1.5)成立，令 u 为(1.1)在 Q_T 中的一个弱解，对某个 $a\in(0,1]$，$R>0$ 和使得 $u(x_0,t_0)>0$ 及 $t_0>\frac{aR^2}{u(x_0,t_0)^{m-1}}$的$(x_0,t_0)\in Q_T$，存在常数 $C_i\geqslant1(i=1,2,3)$仅依赖于 N,m,P 和 Λ_1，使得如果

$$0<\frac{R^2}{u(x_0,t_0)^{m-1}}\leqslant\frac{1}{C_1}\min\left\{1,\frac{C_1}{C_2}(T-t_0)\right\}, \tag{1.10}$$

则有

$$\inf_{x\in B_R(x_0)}u(x,t_0+\frac{C_2R^2}{u(x_0,t_0)^{m-1}})\geqslant\frac{1}{C_3}u(x_0,t_0). \tag{1.11}$$

(iii) 当(1.2)与(1.5)满足且$|||u_0|||_{\infty}<\infty$时，对方程(1.1)的弱解 $u\in C(\overline{Q}_T)$，存在 C_0，$C_1\geqslant1$ 仅依赖于 N,m,P,Λ_1，使得对于 $T_0\leqslant\frac{1}{C_0}$，成立(整体)Harnack 不等式

$$\fint_{Br}u(x,0)\mathrm{d}x\leqslant C_1\left\{(\frac{r^2}{T_0})^{\frac{1}{m-1}}+(\frac{T_0}{r^2})^{\frac{N}{2}}u(0,T_0)^{\frac{\lambda}{2}}\right\}. \tag{1.12}$$

在本文中得到关于方程(1.1)解的分界面的下列结果：

定理 1.1 如果初值 $u_0(x)$具有紧支，即 $\operatorname{supp}\{u_0(x)\}=\overline{\Omega}_0\subset B_{R_0}$ 且 $u(x,t)$为满足(i)中条件的方程(1.1)的弱解，则对任意 $t>0$，总有 $\Omega(t)\subset B_{R(t)}$，其中

$$R(t)\leqslant C(\|u_0\|_{L^1(R^N)}^{m-1}t)^{\frac{1}{\lambda}}+R_0, \tag{1.13}$$

常数 $C>0$ 仅依赖于 N,m,P 和 Λ_1，$R_0>0$.

(1.13)式即说明正解的分界面是存在的.

定理 1.2 设 $u(x,t)$为方程(1.1)满足(1.2)(1.5)且以(1.9)为初值的 Cauchy 问题的弱

解，则当 $0<t_1<t_2<\infty$ 时总有

$$\Omega(t_1)\subset\Omega(t_2). \tag{1.14}$$

此定理说明弱解的分界面具有增长性.

定理 1.3 设 $u(x,t)$ 为(1.1)具初值(1.9)且满足条件(1.2)(1.5)的弱解，则当 $t>0$ 时

$$\Omega(t)\supset\overline{\Omega}_0. \tag{1.15}$$

此定理说明，分界面在 $t=0$ 处即为严格增长的.

2 分界面的存在性

对初值 $u_0\in L^1(R^N)\cap L^\infty(R^N)$ 的情形，定义下列函数 $B:R^N\to[0,\infty]$ 为

$$B(x)=\sup_{R>0}\left(R^{-\frac{\lambda}{m-1}}\int_{|y-x|R}u_0(y)\mathrm{d}y\right). \tag{2.1}$$

于是，由 Harnack 不等式(1.12)立即可得

引理 2.1 如果对某 $x_0\in R^N$ 有 $B(x_0)=\infty$，则 $\forall\ t>0$ 有

$$u(x_0,t)>0. \tag{2.2}$$

即在 $x=x_0$ 处没有等待时间.

证明 由 Harnack 不等式(1.12)可得

$$R^{-\frac{\lambda}{m-1}}\int_{B_R(x_0)}u_0(y)\mathrm{d}y\leqslant C\left\{t^{-\frac{1}{m-1}}+t^{\frac{N}{2}}R^{-\frac{\lambda}{m-1}}u(x_0,t)^{\frac{\lambda}{2}}\right\}.$$

再由条件 $B(x_0)=\infty$ 即有上式左端不小于 $2Ct^{-\frac{1}{m-1}}$，由此立得引理结论.

引理 2.2 给定 $x\in R^N$，$\forall\ t>0$，解 $u(x,t)>0$ 的充分必要条件是 $B(x)=\infty$，即

$$\bigcap_{t>0}\Omega(t)=\{x\in R^N|B(x)=\infty\}. \tag{2.3}$$

进而，当 $B(x)<\infty$ 时，存在常数 $C_1>0$ 仅依赖于 N,m,P 和 Λ_1，使得对于满足

$$0<t\leqslant C_1B(x)^{1-m} \tag{2.4}$$

的 $(x,t)\in Q$，总有 $u(x,t)=0$.

证明 设 $x\in R^N$，当 $B(x)=\infty$ 时，$u(x,t)>0$ 已证. 下证，若 $\forall\ t>0$，$u(x,t)>0$ 必有 $B(x)=\infty$，$\forall\ x\in R^N$.

用反证法. 如果成立

$$B(x)=\sup_{0<R<\infty}(R^{-\frac{\lambda}{m-1}}\int_{|y-x|<R}u_0(y)\mathrm{d}y)\leqslant F_0, \tag{2.5}$$

其中 F_0 为某一正的常数，由此即知此时有 $|||u_0|||_{\sigma}<+\infty$.

首先，由 Harnack 不等式(1.12)可得

$\sup\limits_{0<s<\frac{T}{2}}|||u(\cdot,s)|||_R\leqslant A_T\overset{\triangle}{=}C[\frac{1}{T^{\frac{1}{m-1}}}+T^{\frac{N}{2}}u(0,T)^{\frac{\lambda}{2}}]<\infty$，且结论(1.6)－(1.8)成立.

$\forall\ \varepsilon>0$，在 $R^N\times[\varepsilon,T]$ 中考虑解 $u(x,t)$，由(1.7)有

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_R)}\leqslant C(t-\varepsilon)^{-\frac{N}{\lambda}}R^{\frac{2}{m-1}}|||u(\cdot,\varepsilon)|||_R^{\frac{2}{\lambda}},$$

其中 $\varepsilon<t<T^*=\min\left\{T,\dfrac{1}{C_1\sup\limits_{0<\tau<\varepsilon}|||u(\cdot,\tau)|||_R^{m-1}}\right\}$. 因此

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(B_R)} \leqslant Ct^{-\frac{N}{\lambda}} R^{\frac{2}{m-1}} \varliminf_{\varepsilon\to 0} |||u(\cdot,\varepsilon)|||_R^{\frac{2}{\lambda}}$$

对 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 时的初值 $u_0(x)$，由弱解表达式中 ζ 的适当选取可以证明

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} |||u(\cdot,\varepsilon)|||_R \leqslant C|||u_0|||_R.$$

于是，$\forall\ 0<t\leqslant T^* = \min\left\{\frac{1}{C_1 F_0^{m-1}}, T\right\}$，总成立

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(B_R)} \leqslant C_2 t^{-\frac{N}{\lambda}} R^{\frac{2}{m-1}} |||u_0|||_R^{\frac{2}{\lambda}} \leqslant C_2 F_0^{\frac{2}{\lambda}} t^{-\frac{N}{\lambda}} R^{\frac{2}{m-1}}, \tag{2.6}$$

由条件(1.2)知，其中 C_1 和 C_2 不依赖于 R.

固定 $t\in(0,T^*)$，令 $R\to 0$ 可得

$$u(x,t) = 0.$$

故当 $t^*\leqslant T^*$ 时，对 $0<t<t^*$ 总有 $u(x,t)=0$，其中 $x\in R^N$. 这与 $u(x,t)>0$ 矛盾，得证.

为证分界面的存在性，定义函数

$$d(x) = \sup\left\{r\geqslant 0 \,\middle|\, \int_{Br(x)} u_0(x)\mathrm{d}x = 0\right\}, x\in R^N, \tag{2.7}$$

$d(x)$ 表示从 x 到 u 的初始支集 $\operatorname{supp}\{u_0(x)\} = \overline{\Omega}_0$ 的距离.

由于从(2.1)和(2.7)易知

$$B(x) \leqslant \| u_0 \|_{L^1(R^N)} d(x)^{-\frac{\lambda}{m-1}},$$

故由引理 2.2 可知，当 $0<t<C\| u_0 \|_{L^1(R^N)}^{-(m-1)} d(x)^\lambda$ 时，

$$u(x,t) = 0.$$

于是，有如下推论

推论 2.3 设 $x\in R^N$ 具有性质 $d(x)>0$，则当

$$0\leqslant t\leqslant C_2 d(x)^\lambda \| u_0 \|_{L^1(R^N)}^{-(m-1)} \tag{2.8}$$

时，有

$$u(x,t) = 0.$$

因而，根据此推论与分界面的增长性知，当

$$t > C_2 d(x)^\lambda \| u_0 \|_{L^1(R^N)}^{-(m-1)} \tag{2.9}$$

时，才有 $u(x,t)>0$，由(2.9)解得

$$d(x) < C_3(\| u_0 \|_{L^1(R^N)}^{m-1} t)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

从而，当 $\operatorname{supp}\{u_0(x)\}\subset B_{R_0}$ 时，$\forall\ t>0$，必有 $\Omega(t)\subset B_{R(t)}$，其中

$$R(t) \leqslant C_3(\| u_0 \|_{L^1(R^N)}^{m-1} t)^{\frac{1}{\lambda}} + R_0,$$

即为定理 1.1 的结论.

3　分界面的增长性

下面证明定理 1.2 和定理 1.3.

首先证明定理 1.2，对于 $x_0\in\Omega(t_1)$，有

$$u(x_0,t_1) > 0. \tag{3.1}$$

由局部 Harnack 不等式(1.11)得到

$$u(x_0,t_1) \leqslant C_3 u(x_0,t_1 + \frac{C_2R^2}{u(x_0,t_0)^{m-1}}). \tag{3.2}$$

选取 $R>0$ 使得(3.2)成立且满足(1.10). 对(x_0,t_1+h)重复上述过程可得

$$u(x_0,t_1) \leqslant C_3^2 u(x_0,t_1+2h),\text{当 } h\in(0,h_0), h_0=\min\{C_1,t_1\} \text{且 } h=\frac{C_2R^2}{u(x_0,t_0)^{m-1}}.$$

于是对任意正整数 n 可得

$$0 < u(x_0,t_1) \leqslant C_3^n u(x_0,t_1+nh), \forall\, h \in (0,h_0). \tag{3.3}$$

置 $h\in(0,h_0)$使得

$$nh = t_2 - t_1, \tag{3.4}$$

则由(3.3)与(3.4)即证得定理 1.2.

至于定理 1.3,立即可由引理 2.1 得到.

参考文献:

[1] CHEN Ya-zhe. *On finite diffusing speed for uniformly degenerate quasilinear parabolic equations* [J]. Chin. Ann. Math., 1986, 7B: 318—329.

[2] CHEN Ya-zhe. *Holder estimates for solutions of uniformly degenerate quasilinear parabolic equations* [J]. Chin. Ann. Math, 1984, 5B: 661—678.

[3] 李海峰. 一类非线性渗流方程的 Cauchy 问题 [J]. 数学研究, 1996, 3: 44—54.

[4] 李海峰,江成顺. 具有强非线性源与对流项的多孔介质方程的 Harnack 不等式和初始迹 [J]. 南京大学学报(数学半年刊), 1996, 2: 231—241.

On the Finite Diffusing Property of the Solutions for a Class of Multidimensional Nonlinear Filtration Equations

LI Hai-feng, CHEN Jin-huan

(Zhengzhou Textile Institute, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: This paper discuss the generaler porous medium equations with strongly nonlinear sources and convections terms, we obtain some properties of finite diffusing speed of solutions for the these equations or existence and expansion of interfaces to the non—negtive weak solutions, using the Harnack inequalities for nonnegtive weak solutions to the these equations.

Key words: porous medium equations; nonlinear sources; convection; nonnegative weak solutions; Harnack inequality; interfaces.