第20卷第3期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 3
2000年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2000

非线性波方程新的显式精确解*

范恩贵[1]，张鸿庆[2]
(1. 复旦大学数学研究所，上海 200433； 2. 大连理工大学应用数学系，116024)

摘 要：利用Darboux和一个可化为标准Bernoulli方程的4阶常微分方程，统一地处理了三个著名方程KdV方程，Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程和Hirota-Satsuma(HS)方程的求解问题.给出了这些方程一批新的具有更为丰富形式的精确解，其中包括孤波解和行波解.

关键词：KdV方程；KP方程；HS方程；精确解；孤波解.
分类号：AMS(1991) 34C/CLC O175.12
文献标识码：A 　　**文章编号**：1000-341X(2000)03-0421-04

本文首先将KP方程通过Painleve截尾展开获得限制Darboux变换，而限制方程的相容性条件为一个可化为Bernoulli方程求解的四阶常微分方程，从而获得了KP方程多种具有丰富形式的精确解.最后根据KdV方程与KP方程，Hirato-Satsuma方程与KdV方程的关系，也得到了KdV方程，Hirato-Satsuma方程的多种精确解.

1 预备知识

如下4阶常微分方程

$$\varphi_{xxxx}-(\frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x})_x=0 \tag{1.1}$$

可化为Bernoulli方程求解.

事实上，方程(1.1)对x积分一次，得到$\varphi_{xxx}-\frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x}=a_1$，$a_1$为积分常数.作变换$\varphi_x=\xi$，则该式变为$\xi\xi_{xx}-\xi_x^2=a_1\xi$.再作变换$\xi_x=\eta$，则该式进一步变为$\xi\eta\eta_\xi-\eta^2=a_1\xi$.继续作变换$\eta^2=\omega$，则化为Bernoulli方程$\omega_\xi-\frac{2}{\xi}\omega=2a_1$.因此，根据Bernoulli公式及上述各变换关系得

$$\varphi_{xx}=\xi_x=\sqrt{\omega}=\{e^{\int\frac{2}{\xi}d\xi}[a_2+2\int a_1e^{-\int\frac{2}{\xi}d\xi}d\xi]\}^{1/2}=\sqrt{a_2\xi^2-2a_1\xi}. \tag{1.2}$$

于是求解方程(1.2)可得如下结果

定理 4阶常微分方程(1.1)具有如下种形式的解

情形1 $a_1=a_2=0$时，方程(1.1)具有如下形式的解

* 收稿日期：1997-09-30
基金项目：中国博士后基金和国家基础研究重大课题"数学机械化和自动推理平台(G1998030600)资助项目
作者简介：范恩贵(1962-)，男，满族，河北唐山人，博士后，副教授.

$$\varphi = a_3 z + a_4. \tag{1.3}$$

情形 2　$a_1=0, a_2>0$ 时，方程(1.1)具有如下形式的解

$$\varphi = \pm \frac{a_3}{\sqrt{a_2}} e^{\pm\sqrt{a_2}z} + a_6 \equiv a_5 e^{a_4 z} + a_6. \tag{1.4}$$

情形 3　$a_1\neq 0, a_2=0$ 时，方程(1.1)具有如下形式的解

$$\varphi = -\frac{1}{6} a_1 (z + a_3)^3 + a_4. \tag{1.5}$$

情形 4　$a_1\neq 0, a_2>0$ 时，方程(1.1)具有如下形式的解

$$\varphi = \frac{|a_1| a_3}{2a_2\sqrt{a_2}} e^{\sqrt{a_2}z} - \frac{|a_1|}{2a_2 a_3\sqrt{a_2}} e^{-\sqrt{a_2}z} + \frac{a_1}{a_2} z + a_8 \equiv a_5 e^{a_4 z} + a_6 e^{-a_4 z} + a_7 z + a_8. \tag{1.6}$$

情形 5　$a_1\neq 0, a_2<0$ 时，方程(1.1)具有如下形式的解

$$\varphi = \frac{a_1}{a_2}\{z + \frac{1}{\sqrt{-a_2}}\cos[\sqrt{-a_2}(z+a_3)]\} + a_4 \equiv a_3[a_4 z + \cos(a_4 z + a_5)] + a_6, \tag{1.7}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,8)$积分常数.

2　三类方程的精确解

对 KP 方程

$$u_{xt} + uu_{xx} + u_x^2 + \sigma u_{xxxx} + u_{yy} = 0 \tag{2.1}$$

依 WTC 方法截尾展开，可得如下 Darboux 变换[9](取 $u_0=0$)

$$u = 12\sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\varphi. \tag{2.2}$$

φ满足

$$\varphi_{xt} + \sigma\varphi_{xxxx}^2 + \varphi_{yy} = 0, \tag{2.3}$$

$$\varphi_x\varphi_t + 4\sigma\varphi_x\varphi_{xxx} - 3\sigma\varphi_{xx}^2 + \varphi_y^2 = 0. \tag{2.4}$$

方程(3)—(4)有解的相容性条件为

$$3\sigma\varphi_{xxxx} - 3\sigma(\frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x})_x + (\frac{\varphi_y^2}{\varphi_x})_x - \varphi_{yy} = 0. \tag{2.5}$$

令 $z=x+ky$，方程(2.5)化为

$$\varphi_{zzzz} - (\frac{\varphi_{zz}^2}{\varphi_z})_z = 0. \tag{2.6}$$

上述方程已不显含时间变量 t，可看作 z 的常微分方程，从而可利用定理结论，注意此时定理中所有常数 a_i 都应看作变量 t 的待定函数 $a_i(t)$，然后将各种情况 1—5 的解 φ 代入(2.3)—(2.4)，通过比较系数确定出这些积分函数.

情况 1　将(1.3)代入(2.3)—(2.4)，可得到 $a_30=, a_3a_3z+a_3a_4+k^2a_3^2=0$，由此解得 $a_3=c_1, a_4=-k^2c_1t$. 故

$$\varphi = c_1(x + ky - k^2 t). \tag{2.7}$$

将(2.7)代入(2.2)便得 KP 方程的一种行波解 $u=\frac{-12\sigma}{(x+ky-k^2t)^2}$.

情况 2　首先将(1.4)代入(2.3)，可得到

$$a_4(t)a_5(t)a_4(t)ze^{a_4(t)x}+[a_4(t)a_5(t)+a_5(t)a_4(t)+k^2a_4^2(t)a_5(t)+\sigma a_4^4(t)a_5(t)]e^{a_4(t)x}=0$$

由 $ze^{a_4(t)x}$，$e^{a_4(t)x}$的线性无关性，得

$$a_4(t)a_5(t)a_4(t)=0,\ a_4(t)a_5(t)+a_5(t)a_4(t)+k^2a_4^2(t)a_5(t)+\sigma a_4^4(t)a_5(t)=0.$$

解之得 $a_4(t)=c_1$，$a_5(t)=c_2e^{-(c_1k^2+\sigma c_1^3)t}$，故

$$\varphi=a_6(t)+c_2e^{c_1x-(c_1k^2+\sigma c_1^3)t}. \tag{2.8}$$

再将(2.8)代入(2.4)，知 $a_6(t)=c_3$，故最后有

$$\varphi=c_3+c_2e^{c_1x+c_1ky-(c_1k^2+\sigma c_1^3)t}. \tag{2.9}$$

其中 c_1,c_2,k 为任意常数.

将(2.9)代入(2.2)便得 KP 方程的一种孤波解

$$u=3\sigma c_1^2\mathrm{sech}^2\{\frac{c_1}{2}[x+ky-(k^2+c_1^2t)]+\ln c_2-\ln c_3\}.$$

情况 3　将(1.5)代入(2.3)，类似于情况 2 或 3，可得到

$$\varphi=c_1(x+ky-k^2t)^3+12\sigma c_1t. \tag{2.10}$$

将(2.10)代入(2.2)便得 KP 方程的一种精确解

$$u=\frac{36\sigma(x+ky-k^2t)[24\sigma t-(x+ky-k^2t)^3]}{[12\sigma t+(x+ky-k^2t)^3]^2}.$$

情况 4　将(1.6)代入(2.3)，类似于情况 2 或 3，可得到

$$\varphi=e^{\theta}-e^{-\theta}+2c_1(\theta-2\sigma c_1^2)t. \tag{2.11}$$

其中 $\theta=c_1[x+ky-(k+\sigma c_1^2)t]$，$c_1,k$ 为任意常数.

将(2.10)代入(2.2)便得 KP 方程的一种精确解

$$u=24\sigma c_1^2\,\frac{(\theta-2\sigma c_1^2t-2)e^{\theta}-(\theta-2\sigma c_1^2t+2)e^{-\theta}-4}{[e^{\theta}-e^{-\theta}+2c_1(\theta-2c_1^2t)]^2}.$$

情况 5　将(1.7)代入(2.3)—(2.4)，类似于情况 2 或 3，可得到

$$\omega=\theta+2\sigma c_1^3t+\cos\theta, \tag{2.12}$$

其中 $\theta=c_1[x+ky+(\sigma c_1^2-k^2)t]$，$c_1,k$ 为任意常数.

将(2.12)代入(2.2)，得 KP 方程的一种精确解 $u=-12\sigma c_1^2\,\dfrac{(\theta+2c_1^3\sigma t)\cos\theta-2\sin\theta+2}{(\theta+2c_1^3\sigma t+\cos\theta)^2}$.

KP 方程(2.1)中，当 u 与 y 无关，即 $k=0$ 时，由上述 KP 方程的 5 种精确解便可得 KdV 方程 $u_t+uu_x+\sigma u_{xxx}=0$ 如下 5 种精确解

$$u=\frac{-12\sigma}{x^2},$$

$$u=3\sigma c_1^2\mathrm{sech}^2[\frac{c_1}{2}(x-c_1^2t)+\ln c_2-\ln c_3],$$

$$u=\frac{36\sigma x[24t-x^3]}{[12t+x^3]^2},$$

$$u=24\sigma c_1^2\,\frac{(c_1x-3c_1^3t-2)e^{c_1x-c_1^3t}-(c_1x-3c_1^3t+2)e^{-c_1x+c_1^3t}-4}{[(c_1x-3c_1^3t)+e^{c_1x-c_1^3t}-e^{-c_1x+c_1^3t}]^2},$$

$$u = -12\sigma c_1^2 \frac{(c_1x + 3c_1^3t)\cos(c_1x + c_1^3t) - 2\sin(c_1x + c_1^3t) + 2}{[(c_1x + 3c_1^3t + \cos(c_1x + c_1^3t)]^2}.$$

而对于 Hirota 和 Satsuma 提出的耦合 KdV 方程[7]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} - 2bvv_x = 0, \tag{2.13}$$

$$v_t + 3uv_x + v_{xxx} = 0. \tag{2.14}$$

由于可经过变换

$$u = \frac{1}{3\sigma}\bar{u}, \quad v = \pm\frac{1}{\sigma\sqrt{6b}}\bar{u}, \quad x = \bar{x}, \quad t = \sigma\bar{t} \tag{2.15}$$

化为同一个 KdV 方程 $\bar{u}_t + \bar{u}\bar{u}_x + \sigma\bar{u}_{xxx} = 0$. 故利用上述对 KdV 方程已有结果及(2.15)便得 Hirota-Satsuma 方程的多种精确解(略).

致谢 作者之一(范恩贵)感谢导师谷超豪院士、胡和生院士的热情指导和帮助.

参考文献:

[1] ABLOWITZ M J, CARKSON P A. *Solitons, Nonlinear Evolution and Inverse Scatting* [M]. New York, Cambridge University Press, 1991.

[2] MIURA M R. *Backlund Transformation* [M]. Berlin, Springer-Verlag, 1978.

[3] HIROTA R. *Exact solution of KdV equation for multiple collisions of solutions* [J]. Phys. Rev. Lett., 1977, **27**: 1192.

[4] GU C-H, ZHOU Z-X. *On the Darboux matrices of Backlund transformations for the AKNS system* [J]. Lett. Math. Phys., 1987, **13**: 179.

[5] 谷超豪,等. 孤立子理论和应用 [M]. 杭州:浙江科技出版社,1990.

[6] 李翊神,等. 非线性科学选讲 [M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1994.

[7] HIROTA R, SATSUMA J. *Soliton solutions of a coupled KdV equation* [J]. Phys. Lett. A, 1981, **85**: 407.

[8] WEISS J. *Modified equations, rational solutions, and the Painlere property for the KP and Hirota-Satsuma equation* [J]. J. Math. Phys., 1983, **24**(6): 1405—1413.

Explicit Exact Solutions for Nonlinear Wave Equations

FAN En-gui[1], ZHANG Hong-qing[2]

(1. Inst. of Math., Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Darboux transformation and a fourth order ordinary equation are used to uniformly construct exact solutions for three well-known equations: KdV equation, Kadomtsev-Petviashvili equation and Hirota-Satsuma equation. These solutions possess various forms and especially contain well-known solitary wave solution and travelling wave solutions.

Key words: KdV equation; KP equation; HS equation; exact solution; solitary wave solution.