第 20 卷第 3 期　　数学研究与评论　　Vol. 20 No. 3
2000 年 8 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2000

具有给定西洛子群正规化子性质的局部群系*

郭文彬，　缪龙，　陈建华
（扬州大学数学系，江苏 225002）

摘　要：本文研究了满足条件 $N^{\mathscr{F}}\subseteq\mathscr{F}$ 的局部群系集合的代数性质，同时对于这类群类 $\mathscr{F}$，给出了极小非 $\mathscr{F}$-群的结构.

关键词：群论；群系理论；局部群系；群系代数.
分类号：AMS(1991) 20D20/CLC O152.1
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2000)03-0425-04

1　引言及主要结论

本文继续文[1－4]的研究．一个群系 $\mathscr{F}$ 称为具有Sylow子群正规化子性质，如果 $\mathscr{F}$ 包含所有那样的群，其非单位 Sylow 子群的正规化子属于 $\mathscr{F}$．[1－4]对于一系列群系解决了它们是否具有 Sylow 子群正规化子性质．由此进一步产生了这样一个问题：具有 Sylow 子群正规化子性质的群系的集合有什么样的代数性质?解决这个问题，无论作为理论本身还是对于继续深入研究具有给定 Sylow 子群正规化子的有限群和彻底解决在文[2，4]中所述的 Шеметков 问题都具有重要意义．本文不仅给出了这方面的一些研究成果，而且对于具有 Sylow 子群正规化子性质的群系 $\mathscr{F}$，研究了极小非 $\mathscr{F}$- 群的构造.

本文中所有群为有限群，定义与符号参见[5，6]．为方便读者，这里列出后面需要的一些主要概念和结果.

一个群的集合称为群类，如果当它包含一个群 G 时，则它就包含所有与 G 同构的群．一个群类称为群系，如果它是同态像闭的和次直积闭的.

一个函数 f 称为群系函数，如果对于所有素数 p，$f(p)$ 是一个群系.

一个群系 $\mathscr{F}$ 称为局部群系，如果存在一个群系函数 f，使得 $\mathscr{F}=\{G|G$ 是一个群，且 $G/C_G(H/K)\in f(p)$，对于所有 G 的主因子 H/K 和所有整除 $|H/K|$ 的素数 $p\}$．在这种情况下，我们称 $\mathscr{F}$ 是由 f 局部定义的，f 称为 $\mathscr{F}$ 的屏，并记为 $\mathscr{F}=LF(f)$．设 f 为 $\mathscr{F}$ 的一个屏．f 称为 $\mathscr{F}$ 的内屏，如果 $f(p)\subseteq\mathscr{F}$．$\mathscr{F}$ 的一个内屏 f 称为极大内屏，如果对于 $\mathscr{F}$ 的任一内屏 f_1 总有 $f_1(p)\subseteq f(p)$，这里 p 为任意素数．一个群系称为饱和的，如果当 $G/\Phi(G)\in\mathscr{F}$ 时有 $G\in\mathscr{F}$．众所周知，一个群系是饱和的当且仅当它是局部的.

* 收稿日期：1997-08-20；修订日期：1999-06-04
基金项目：江苏省"青蓝工程"基金和江苏省 333 工程资助项目
作者简介：郭文彬(1955-)，男，江苏人，前苏联数理博士，扬州大学教授.

一个群系 $\mathscr{F}$ 称为 $\check{S}$- 群系，如果任意非循环的极小非 $\mathscr{F}$- 群为斯米特群.

用 π 表示素数的某一集合，π' 表示不在 π 中的所有素数的集合. $\pi(G)$ 表示 G 的阶的所有不同素因数的集合. G_p 表示 G 的某 Sylow p- 子群. 用 $\mathscr{N}$ 表示所有幂零群的群类；$\mathscr{N}_p$ 表示所有 p- 群的群类，这里 p 为某一素数；$\mathscr{S}$ 表示所有可解群的群类. $\mathscr{G}_\pi$ 表示所有 π- 群的群类；$C_\pi\mathscr{N}$ 表示有一个 Hall π- 子群为幂零群的所有群的群类. 易知 $\mathscr{N}$，$\mathscr{N}_p$，$\mathscr{S}$，$\mathscr{G}_\pi$ 都是局部群系，而由[3]之引理 3.2 知 $C_\pi\mathscr{N}$ 为局部群系. 设 $\mathscr{F}$ 为一个群系. 令 $\pi(\mathscr{F}) = \bigcup\limits_{G\in\mathscr{F}}\pi(G)$，$\mathscr{F}_\pi = \mathscr{F} \cap \mathscr{G}_\pi$，$N^{\mathscr{F}} = \{G|G$ 为群且对于任意 $p \in \pi(G)$ 有 $N_G(G_p) \in \mathscr{F}\}$.

设 $\mathscr{X}$，$\mathscr{F}$ 为两个群类. 令 $\mathscr{X} \times \mathscr{F} = \{A \times B | A \in \mathscr{X}, B \in \mathscr{F}\}$. 如果 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{F}$ 都为群系，且 $\pi(\mathscr{X}) \cap \pi(\mathscr{F}) = \varnothing$，则易知 $\mathscr{X} \times \mathscr{F}$ 也是群系(参见[7]之引理 4).

命题 1 设 G 为一个群. 如果对于任意 $p \in \pi(G)$ 有 $N_G(G_p) \in \mathscr{N}$，则 $G \in \mathscr{N}$ (参见[1]).

命题 2 设 $\mathscr{F}$ 为子群闭的局部 $\check{S}$- 群系，则 $N^{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{F}$ 当且仅当对于任意 $\pi(\mathscr{F})$ 中的二元子集 σ 有 $\mathscr{F}_\sigma \in \{\mathscr{N}_\sigma, \mathscr{S}_\sigma\}$(参见[2]).

命题 3 设 $\mathscr{F}$ 为子群闭的可解群的局部群系. 则 $\mathscr{F}$ 是 $\check{S}$- 群系当且仅当 $\mathscr{F}$ 有这样的屏 f，满足对于任意 $p \in \pi(\mathscr{F})$ 有 $f(p) = \mathscr{S}_{\pi(f(p))}$(参见[5]之定理 3.5.6).

定理 1 设 $\mathscr{F}$ 为某一群系. 若 $N^{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{F}$，则对于任意素数集合 π 有 $N^{\mathscr{F}_\pi} \subseteq \mathscr{F}_\pi$.

证明 假设 $G \in N^{\mathscr{F}_\pi}$，则对于任意 $p \in \pi(G)$，有 $N_G(G_p) \in \mathscr{F}_\pi$. 由于 $\mathscr{F}_\pi = \mathscr{F} \cap \mathscr{G}_\pi$，所以 $\pi(N_G(G_p)) \subseteq \pi$，$\forall\, p \in \pi(G)$. 于是 $\pi(G) \subseteq \pi$. 另一方面，由于 $N_G(G_p) \in \mathscr{F}_\pi \subseteq \mathscr{F}$，$\forall\, p \in \pi(G)$，故据条件 $N^{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{F}$，有 $G \in \mathscr{F}$. 于是 $G \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}_\pi = \mathscr{F}_\pi$. 因此 $N^{\mathscr{F}_\pi} \subseteq \mathscr{F}_\pi$. □

推论 1 设 G 为一个群. 如果 G 的任意 Sylow 子群的正规化子为幂零 π- 群，则 G 为幂零 π- 群.

证明 由命题 1 和定理 1 立得.

定理 2 设 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$ 为两个群系，如果 $N^{\mathscr{F}_i} \subseteq \mathscr{F}_i$，$i = 1,2$，则 $N^{\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2} \subseteq \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$.

证明 设 $G \in N^{\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2}$，那么对于任意 $p \in \pi(G)$ 有 $N_G(G_p) \in \mathscr{F}_i$，$i = 1,2$. 于是由条件 $N^{\mathscr{F}_i} \subseteq \mathscr{F}_i$ 得到 $G \in \mathscr{F}_i$，$i = 1,2$，从而 $G \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$. □

推论 2 设 π 为素数的某一集合，那么在可解群中有 $N^{(C_\pi\mathscr{N}) \cap (C_{\pi'}\mathscr{N})} \subseteq (C_\pi\mathscr{N}) \cap (C_{\pi'}\mathscr{N})$.

证明 由[3]之定理 3.1 和定理 2 立得.

引理 1 每个局部群系至少有一个内屏.

证明 设 f 为局部群系 $\mathscr{F}$ 的一个屏. 定义一个群系函数 f_1 如下：$f_1(p) = f(p) \cap \mathscr{F}$，对于任意素数 p. 那么由于两个群系的交还是一个群系，所以 f_1 是一个群系函数，且显然 $LF(f_1) \subseteq LF(f) = \mathscr{F}$. 另一方面，如果 $G \in \mathscr{F}$ 且 H/K 为 G 的任一 pd- 主因子(即 $p \,|\, |H/K|$)，则 $G/C_G(H/K) \in f(p)$. 又因为 $\mathscr{F}$ 是商闭的，所以 $G/C_G(H/K) \in \mathscr{F}$，于是 $G/C_G(H/K) \in \mathscr{F} \cap f(p) = f_1(p)$，从而 $G \in LF(f_1)$. 因此 $\mathscr{F} = LF(f_1)$ 且显然 f_1 是 $\mathscr{F}$ 的内屏. □

从以下引理 2 至定理 3(包括定理 3 的证明)在可解群中讨论.

引理 2 设 $\mathscr{X}$，$\mathscr{F}$ 为子群闭的局部群系且 $\pi(\mathscr{X}) \cap \pi(\mathscr{F}) = \varnothing$. 则 $\mathscr{X} \times \mathscr{F}$ 也是子群闭的局部群系.

证明 显然 $\mathscr{X}\times\mathscr{F}$ 是子群闭的，所以只需证明 $\mathscr{X}\times\mathscr{F}$ 是局部的群系. 因为 $\mathscr{X}$，$\mathscr{F}$ 为局部群系，由引理 1 可设 $\mathscr{X}=LF(f_1)$，$\mathscr{F}=LF(f_2)$，其中 f_1，f_2 分别为 $\mathscr{X}$，$\mathscr{F}$ 的极大内屏. 作群系函数 f：

i) $f(p)=f_1(p)$，如果 $p\in\pi(\mathscr{X})$；

ii) $f(p)=f_2(p)$，如果 $p\in\pi(\mathscr{F})$.

现证明 $\mathscr{X}\times\mathscr{F}=LF(f)$，从而 $\mathscr{X}\times\mathscr{F}$ 为以 f 为屏的局部群系.

任取 $G\in\mathscr{X}\times\mathscr{F}$，则存在 $A\in\mathscr{X}$，$B\in\mathscr{F}$，使得 $G=A\times B$. 设 H/K 为 G 的一个主因子. 由 Jordan-Hölder 定理 H/K 同构于 A 的一个主因子或 B 的一个主因子. 于是相应地有 $G/C_G(H/K)\in f_1(p)=f(p)$（当 $p\in\pi(H/K)$ 且 H/K 同构于 A 的一个主因子时）或 $G/C_G(H/K)\in f_2(p)=f(p)$（当 $p\in\pi(H/K)$ 且 H/K 同构于 B 的一个主因子时）. 因此 $G\in LF(f)$，从而 $\mathscr{X}\times\mathscr{F}\subseteq LF(f)$.

下面证明 $LF(f)\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{F}$. 假设 $LF(f)\nsubseteq\mathscr{X}\times\mathscr{F}$，令 G 为 $LF(f)\backslash\mathscr{X}\times\mathscr{F}$ 中极小阶群. 由于 $\mathscr{X}\times\mathscr{F}$ 为群系，所以 G 有唯一极小正规子群 N 且 $G/N\in\mathscr{X}\times\mathscr{F}$. 设 $G/N=G_1/N\times G_2/N$，其中 $G_1/N\in\mathscr{X}$，$G_2/N\in\mathscr{F}$. 因为 G 可解，所以对于某一素数 p 有 N 为 p- 群. 因为 $G\in LF(f)$，所以 $p\in\pi(\mathscr{X})$ 或 $p\in\pi(\mathscr{F})$，不妨设 $p\in\pi(\mathscr{X})$. 因为 $\pi(\mathscr{X})\cap\pi(\mathscr{F})=\varnothing$，所以 N 为 G_2 的正规 Sylow p- 子群，从而由 Schur − Zassenhaus 定理（参见[8] p. 349），N 在 G_2 中有补子群：$G_2=G_{21}\rhd\!\!< N$. 又由于 $G/C_G(N)\in f(p)=f_1(p)\subseteq\mathscr{X}$，且 $G_{21}\in\mathscr{F}$，所以 $G_{21}\subseteq G_G(N)$，从而 $G_2=G_{21}\times N$，于是 $G=G_1\times G_{21}$. 因为 $\mathscr{X}$ 是子群闭的，所以 $f_1(p)$ 也是子群闭的（参见[4]之引理1）. 故由 $G/C_G(N)\in f_1(p)$，有 $G_1/C_{G_1}(N)\in f_1(p)$，即 N 含于 G_1 的 f_1- 超中心. 于是由 $G_1/N\in\mathscr{X}$，得到 $G_1\in\mathscr{X}$. 所以 $G=G_1\times G_{21}\in\mathscr{X}\times\mathscr{F}$. 此矛盾表明了 $LF(f)\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{F}$. □

定理 3 设 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$ 为两个子群闭的局部 $\check{S}$- 群系且具有性质 $N^{\mathscr{F}_i}\subseteq\mathscr{F}_i$，$i=1,2$. 如果 $\pi(\mathscr{F}_1)\cap\pi(\mathscr{F}_2)=\varnothing$，那么 $N^{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}\subseteq\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$.

证明 令 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$. 由条件和引理 2 以及命题 3 知 $\mathscr{F}$ 仍是子群闭的局部 $\check{S}$- 群系. 由命题 2 知，要证明 $N^{\mathscr{F}}\subseteq\mathscr{F}$，只需证明对于任意 $\pi(\mathscr{F})$ 中的二元子集 σ 有 $\mathscr{F}_\sigma\in\{\mathscr{N}_\sigma,\mathscr{S}_\sigma\}$. 事实上，因为 $N^{\mathscr{F}_i}\subseteq\mathscr{F}_i$，$i=1,2$，所以由命题 2 知对于任意二元子集 $\sigma\subseteq\pi(\mathscr{F}_i)$，$i=1,2$，有 $\mathscr{F}_\sigma\in\{\mathscr{N}_\sigma,\mathscr{S}_\sigma\}$. 现任取 $\pi(\mathscr{F})$ 中二元子集 $\sigma=\{p,q\}$. 若 $\{p,q\}\subseteq\pi(\mathscr{F}_i)$，对某一个 $i\in\{1,2\}$，则已有 $\mathscr{F}_\sigma\in\{\mathscr{N}_\sigma,\mathscr{S}_\sigma\}$. 若 $p\in\pi(\mathscr{F}_1)$，$q\in\pi(\mathscr{F}_2)$，则由 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$，知 $\mathscr{F}_\sigma=\mathscr{N}_p\times\mathscr{N}_q=\mathscr{N}_\sigma$. 于是对于 $\pi(\mathscr{F})$ 中的任意二元子集 σ 都有 $\mathscr{F}_\sigma=\mathscr{N}_\sigma$ 或 $\mathscr{S}_\sigma$. □

推论 2 设 π，π_1 为两个素数的集合，则

$$N^{(C_\pi\mathscr{N})_{\pi_1}\times\mathscr{S}_{\pi'_1}}\subseteq(C_\pi\mathscr{N})_{\pi_1}\times\mathscr{S}_{\pi'_1}.$$

证明 由[3]之引理 3.2 和命题 3 知 $C_\pi\mathscr{N}$ 为子群闭的 $\check{S}$- 群系. 再由[3]之定理 3.1 知 $N^{C_\pi\mathscr{N}}\subseteq C_\pi\mathscr{N}$，从而由定理 1 知 $N^{(C_\pi\mathscr{N})_{\pi_1}}\subseteq(C_\pi\mathscr{N})_{\pi_1}$. 另一方面，由命题 3 及[2]之推论 2 知 $\mathscr{S}_{\pi'_1}$ 为子群闭的局部 $\check{S}$- 群系且 $N^{\mathscr{S}_{\pi'_1}}\subseteq\mathscr{S}_{\pi'_1}$. 于是应用定理 3，得到该推论的结果.

推论 3 设 π，π_1，π_2 为素数的三个集合，令 $\mathscr{F}=(C_{\pi_1}\mathscr{N})_\pi\times(C_{\pi_2}\mathscr{N})_{\pi'}$. 则 $N^{\mathscr{F}}\subseteq\mathscr{F}$.

定理 4 设 $\mathscr{F}$ 为一个局部群系且 $N^{\mathscr{F}}\subseteq\mathscr{F}$. 如果 G 为极小非 $\mathscr{F}$- 群，则 $G=G^{\mathscr{F}}>\!\!\lhd G_{p'}$.

证明 如果对于任意 $p\in\pi(G)$ 有 $N_G(C_p)\neq G$，那么由 G 是极小非 $\mathscr{F}$- 群，有 $N_G(G_p)$

$\in \mathscr{F}$，$\forall p \in \pi(G)$. 这表明 $G \in N^{\mathscr{F}}$. 于是由条件得 $G \in \mathscr{F}$，矛盾. 故一定存在 $p \in \pi(G)$ 使 $G_p \lhd G$. 由 Schur-Zassenhaus 定理，G_p 在 G 中有补子群，记为 M. 显然 M 为 G 的 Hall p'-子群. 因为 G 为极小非 $\mathscr{F}$-群，所以 $M \in \mathscr{F}$,从而 $G/G_p \in \mathscr{F}$. 于是 $G^{\mathscr{F}} \subseteq G_p$.

因为 $G_p \lhd G$,所以 $\Phi(G_p) \subseteq \Phi(G)$. 由于 $\mathscr{F}$ 是局部的，所以 $G^{\mathscr{F}}$ 不含于 $\Phi(G_p)$(否则 $G^{\mathscr{F}} \subseteq \Phi(G_p) \subseteq \Phi(G)$，从而由 $G/G^{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$ 得 $G/\Phi(G) \in \mathscr{F}$,进而 $G \in \mathscr{F}$，与已知条件矛盾). 假设 $\Phi(G_p)G^{\mathscr{F}} \neq G_p$. 由于 $G_p/\Phi(G_p)$ 是幂零的，所以 $G_p/\Phi(G_p)$ 是初等交换群(参见[8],p. 433,定理 10). 又由于 M 正规化 G_p，所以 $G_p/\Phi(G_p)$ 可以看成 $F_p[M]$-模:对于任意 $m \in M$,

$$(g\Phi(G_p))^m = m^{-1}gm\Phi(G_p),\ \forall g \in G_p.$$

因为$(|M|,p) = 1$，由 Maschke 定理(参见[6],p. 39，定理 11. 6)，$G_p/\Phi(G_p)$ 完全可约，从而在 G 中可以找到那样的正规子群 B，使 $BG^{\mathscr{F}} = G_p$ 且 $B \cap G^{\mathscr{F}} = \Phi(G_p)$. 那么由等式 $MG^{\mathscr{F}}B = G$ 以及 $MG^{\mathscr{F}} \neq G$(因为假设了 $\Phi(G_p)G^{\mathscr{F}} \neq G_p$)，有

$$G/B \simeq MG^{\mathscr{F}}/B \cap MG^{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}.$$

于是 $G^{\mathscr{F}} \subseteq B$，从而 $G^{\mathscr{F}} = G^{\mathscr{F}} \cap B = \Phi(G_p)$. 这与 $G^{\mathscr{F}}$ 不含于 $\Phi(G_p)$ 矛盾. 故“假设 $\Phi(G_p)G^{\mathscr{F}} \neq G_p$”不成立，即 $G_p = \Phi(G_p)G^{\mathscr{F}} = G^{\mathscr{F}}$. 因此 $G^{\mathscr{F}}$ 为 G 的一个正规 Sylow p-子群，从而 $G = G^{\mathscr{F}} \rtimes G_{p'}$. □

参考文献：

[1] BIANCHI M, MAURI A G B, HAUCK P. *On finite groups with nilpotent Sylow-normalizers* [J]. Arch. Math., 1986, **47**: 193—197.

[2] 郭文彬. 关于具有给定西洛子群正规化子的有限群 [J]. 科学通报，1994，**39**(3)：204—206.

[3] 郭文彬. 具有给定 Sylow 子群正规化子的有限群 [J]. 数学年刊 A 辑，1994，**15**(6)：627—631.

[4] 郭文彬. 关于具有给定 Sylow 子群正规化子的有限群 I [J]. 数学学报，1996，**39**(4)：509—513.

[5] 郭文彬. 群类论 [M]. 北京:科学出版社,1997.

[6] DOERK K, HAWKES T. *Finite Soluble groups* [M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[7] 郭文彬. 形如 $\mathscr{N}_p$ 的子群系可补的局部群系 [J]. 科学通报，1997，**42**(2):122—125.

[8] 张远达. 有限群构造 [M]. 北京:科学出版社，1982.

On Local Formations with Given Sylow-Normalizers

GUO Wen-bin, MIAO Long, CHEN Jian-hua

(Dept. of Math., Yangzhou University, Yangzhou 225002, China)

Abstract: In this paper we investigate algebraic properties of the set of local formations $\mathscr{F}$ which satisfy $N^{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{F}$, and for such formation $\mathfrak{F}$ we give the structure of minimal non-$\mathscr{F}$-group.

Key words: group; formation; local formation; algebra of formations.