# 左非奇异左CS-环和左遗传左CS-环*

魏　丰
（吉林大学数学系，长春 130023）

**摘　要**：本文首先证明了：环为左非奇异左CS-环当且仅当它为左余非奇异Baer环，然后给出左遗传左CS-环，正则左遗传左CS-环和左遗传左连续环的某些刻划.

**关键词**：左CS-环；左非奇异环；左遗传环；左连续环.
**分类号**：AMS(1991) 16A，16D/CLC O153.3
**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)03-0447-04

## 1　引　言

众所周知，直和分解是环论的一个重要内容，也是研究环的结构和性质时常用的方法.现在我们就用这种方法探讨两种特殊CS-环的一些性质.CS-环的概念是由Chatters，A. W[1]等人采用逼近直和项的方法提出来的.半单环，自内射环，QF-环，一致环和连续环等都是CS-环(参见[1—3])，因此对这类环的研究引起了许多学者的关注，并且得到一些重要结果(参见[1,2,4,10]).本文主要讨论左非奇异左CS-环和左遗传左CS-环这两种特殊的CS-环.

在本文中，$R$表示有单位元的结合环，所有的模均为酉作用左模，$N\lhd_R M$表示$N$为$R$-模$M$的一个子模，$N\trianglelefteq_R M$表示$N$为$R$-模$M$的一个本质子模.

称$N$为${}_RM$的补子模，如果$N\lhd_R M$且$N$为$M$的某一子模在$M$中的交补.称${}_RM$为CS-模，如果${}_RM$的每个补子模都是它的一个直和项.称$R$为左CS-环，如果${}_RR$是CS-模.

## 2　左非奇异左CS-环

集合$Si(R)=\{r\in R|Ur=0,\ U\trianglelefteq_R R\}$叫做环$R$的左奇异理想.如果$Si(R)=0$，那么称$R$为左非奇异环.如果环$R$的每个非空子集的左零化子均由一幂等元生成，那么称$R$为Baer环.

**引理 2.1**　Baer环为左非奇异环.

**证明**　设$R$为Baer环，$Si(R)=\{r\in R|Ur=0,\ U\trianglelefteq_R R\}$，那么$U\subseteq l(r)$，这里$l(r)$为

* 收稿日期：1998-03-12
基金项目：国家教育部博士点基金资助项目
作者简介：魏丰(1973- )，男，吉林大学博士生.

$r$ 在 $R$ 中的左零化子. 由 Baer 环的定义知, 存在幂等元 $e \in R$ 使得 $l(r) = Re$. 注意到 $U \trianglelefteq R$, 所以 $l(r) = Re \trianglelefteq_R R$. 又 $Re$ 为 $_RR$ 的直和项, 因此 $l(r) = R$, $r = 0$, 这样就证明了 $R$ 是左非奇异环.

[4] 中提到了一种环, 即环 $R$ 的右零化子为零的左理想均为其本质左理想, 称环 $R$ 为左余非奇异环.

**定理 2.2** $R$ 为左非奇异左 CS- 环当且仅当 $R$ 为左余非奇异 Baer 环.

**证明** 设 $R$ 为左非奇异左 CS- 环, $S$ 为 $R$ 的一个非空子集. 先证明 $l(S)$ 为 $R$ 的一个补左理想, 这里 $l(S)$ 为 $S$ 在 $R$ 中的左零化子. 由[5] 的引理 2.3, 只需证明 $R/l(S)$ 为非奇异 $R$- 模即可. 设 $0 \neq r + l(S) \in Si(R/l(S))$, 因为 $Si(R/l(S)) = \{r + l(S) \in R/l(S) \mid U(r + l(S)) = 0, U \trianglelefteq_R R\} = \{r + l(S) \in R/l(S) \mid Ur \subseteq l(S), U \trianglelefteq_R R\}$, 所以对任何 $s \in S$, 都有 $Urs = 0$. 又 $r \notin l(S)$, 于是存在 $s' \in S$ 使得 $rs' \neq 0$ 且 $rs' \in Si(R)$, 这与 $R$ 的左非奇异性矛盾. 因此 $Si(R/l(S)) = 0$, 即 $R/l(S)$ 是非奇异 $R$- 模. 由于 $R$ 是左 CS- 环, 所以 $l(S)$ 为 $_RR$ 的一个直和项. 于是存在幂等元为 $e \in R$ 使 $l(S) = Re$, 这就证明了 $R$ 为 Baer 环.

设 $I$ 不为 $R$ 的本质左理想, 而补左理想 $C$ 使得 $I \trianglelefteq C$. 因为 $C$ 是 $_RR$ 的直和项, 所以存在幂等元 $f \in R$ 使 $C = Rf$. 显然 $C$ 不是 $R$ 的本质左理想. 又因为 $Rf(1 - f) = 0$, $r(C) \subseteq r(I)$, 所以 $0 \neq 1 - f \in r(I)$, 这里 $r(I)$ 表示 $I$ 在 $R$ 中的右零化子. 故 $R$ 又为左余非奇异的.

反之, 设 $R$ 为左余非奇异 Baer 环, 由引理 2.1 知 $R$ 为左非奇异环. 再由[4] 的定理 2.2, 如果 $C$ 为 $R$ 的一个补左理想, 那么 $C$ 必为 $R$ 的一个左零化子. 因而存在幂等元 $g \in R$ 使 $C = Rg$, 于是 $C$ 为 $_RR$ 的一个直和项, 故 $R$ 为左 CS- 环.

称 $R$ 为左 Rickart 环, 如果 $R$ 的每个主左理想都是投射的. 定理 2.2 说明有如下关系:

左非奇异左 CS- 环 $\Rightarrow$Baer 环 $\Rightarrow$ 左 Rickart 环

下面用投射性来刻划左非奇异左 CS − 环.

**命题 1.3** 左非奇异环 $R$ 是左 CS − 环的充要条件是每个循环非奇异 $R$- 模都为投射的.

**证明** 设 $M = Rm$, $m \neq 0$ 是非奇异 $R$- 模. 因为 $Rm \cong R/\mathrm{ann}_R(m)$, $M$ 为非奇异的, 由[5] 的引理 2.3 知 $\mathrm{ann}_R(m)$ 为 $R$ 的一个补左理想. 又 $R$ 为左 CS- 环, 因此 $\mathrm{ann}_R(m)$ 是 $_RR$ 的一个直和项. 设 $L \triangleleft_R R$ 使 $_RR = L \oplus \mathrm{ann}_R(m)$, 于是 $L \cong Rm$, 故 $M$ 为投射模.

反之, 设 $C$ 是左非奇异环 $R$ 的一个补左理想, 由[5] 的引理 2.3 知循环 $R$- 模 $R/C$ 是非奇异的, 所以 $R/C$ 是投射的, $C$ 为 $_RR$ 的一个直和项, 故 $R$ 为左 CS- 环.

## 3 左遗传左 CS- 环

称环 $R$ 为左(半) 遗传的, 如果其(有限生成) 左理想都是投射的. 称环 $R$ 的左理想 $U$ 为一致左理想, 如果 $0 \neq I \triangleleft_R R$, $0 \neq J \triangleleft_R R$, $I \triangleleft U$, $J \triangleleft U$, 那么 $I \cap J \neq 0$.

**引理 3.1**[6] 如果 $R$ 是左遗传左 CS- 环, 那么 $R$ 为诺特一致左理想的直和.

由此可得

**推论 3.2** 左遗传左 CS- 环是左诺特环.

**推论 3.3** 若 $R$ 为左遗传左 CS- 环, 则 $R$ 有左阿丁的左商环且其也为左 CS- 环.

**证明** 因为左遗传左 CS- 环是左非奇异的, 再由推论 3.2 和[1] 的定理 6.7 即得.

**推论** 3.4　如果 $R$ 是直不可分解遗传 CS- 环，那么 $R$ 或为素环或为阿丁环；$R$ 为素环时，则必又是 Rickart 环.

**证明**　由推论 3.2 和[1]的定理 6.14 及命题 6.8 可得.

**引理** 3.5[7]　设 $R$ 为左半遗传环，如果对任意正整数 $n$，$R_n$ 不含无穷多个正交幂等元，那么 $R$ 也为右半遗传环. 这里 $R_n$ 为 $R$ 上的 $n$ 阶全阵环.

**定理** 3.6　若 $R$ 是左遗传左 CS- 环，则 $R$ 也是右半遗传环.

**证明**　因为 $R$ 是左遗传左 CS- 环，由推论 3.2 知 $R$ 是左诺特环，因此 $R_n$ 也是左诺特环. 而左诺特环中不含无穷多个正交幂等元，又 $R$ 显然是左半遗传环，由引理 3.5 知 $R$ 也是右半遗传环.

类似地有

**推论** 3.7　右遗传右 CS- 环必为左半遗传环.

我们知道右半遗传环不一定为左半遗传环，但的确存在右半遗传环为左半遗传环的例子(参见[7]). 推论 3.7 则给出了一个新的右半遗传环为左半遗传环的例子.

称模 $M$ 为正则模，如果 $M$ 的每个循环子模都是它本身的一个直和项. 当 ${}_RR$ 是正则模时，称环 $R$ 为正则环.

**命题** 3.8　如果 $R$ 是正则左遗传左 CS- 环，那么 $R$ 又是半单环.

**证明**　首先，证明 $R$ 的正则一致左理想作为 $R$- 模必为单的，设 $0 \neq L$ 为 $R$ 的正则一致左理想，于是对任何 $0 \neq l \in L$ 都有 $0 \neq Rl \trianglelefteq L \triangleleft_R R$. 因为 $R$- 模 $L$ 也是正则的，所以 $Rl$ 是 $L$ 的一个直和项. 因此 $Rl = L$，即 $L$ 为单模.

又由于 $R$ 是左遗传左 CS- 环，依据引理 3.1 知 $R$ 是一致左理想的直和. $R$ 又为正则环，所以这些一致左理想作为 $R$- 模也都是正则的，从而为单的. 综上所述，${}_RR$ 是一些单左理想的直和，即 ${}_RR$ 是半单的.

类似地有

**命题** 3.9　正则右遗传右 CS- 环必为半单环.

称模 $M$ 为连续模，如果 $M$ 是 CS- 模且同构于 $M$ 的直和项的子模也是其直和项，若 ${}_RR$ 为连续模，则称 $R$ 为左连续环.

**定理** 3.10　设 $R$ 是左遗传左连续环，那么 $R$ 为诺特一致左理想的直和，并且每个诺特一致左理想的自同态环既是除环又是左遗传环.

**证明**　设 $R$ 是左遗传左连续环，显然 $R$ 也是左遗传左 CS- 环，由引理 3.1 知 $R$ 是诺特一致左理想的直和. 设 $L$ 为 $R$ 的一个这样的直和项. 因为 $R$ 是左非奇异环，所以 $L$ 是非奇异左理想. 设 $\varphi \in \mathrm{End}({}_RL)$，$\mathrm{Ker}\varphi \neq 0$，则对任何 $l \in L$ 都存在 $R$ 的本质左理想 $E$ 使 $El \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$(参见[8] 的引理 1.1). 因为 $E(l)\varphi = 0$，$L$ 是非奇异左理想，所以 $(l)\varphi = 0$，$\varphi = 0$. 这表明 $L$ 的任意非零自同态均为单射，故 $\mathrm{Im}\varphi \cong L$，$L = \mathrm{Im}\varphi$. 即知 $\varphi$ 为 $L$ 的一个自同构，$\mathrm{End}({}_RL)$ 是除环.

又因为 $R$ 中有幂等元 $e$ 使 $L = Re$，所以 $L$ 是遗传环 $R$ 上的投射模，这样 $L$ 就为遗传模且为有限生成的，由[9] 的定理 2.5 知 $\mathrm{End}({}_RL)$ 是左遗传环.

如果环 $R$ 的 Jacobson 根 $J(R) = 0$，那么称 $R$ 为半本原环.

**命题** 3.11　左遗传左连续环为半本原环.

**证明**　设 $R$ 为左遗传左连续环，那么 $R$ 又为左非奇异环，即 $Si(R) = 0$. 由[10]的引理 4.1

知 $J(R)=0$,因此 $R$ 为半本原环.

**推论 3.12** 若 $R$ 为左遗传左连续环,则 $R$ 有忠实半单模.

**证明** 由命题 3.11 及[11]的命题 15.14 可得.

**命题 3.13** 若 $R$ 为左阿丁左连续环,则 $Si(R)$ 为幂零理想.

**证明** 由于 $R$ 是左阿丁环,所以 $J(R)$ 为幂零理想. 由[10]的引理 4.1 知 $Si(R)$ 也是幂零的.

## 参考文献:


[1] CHATTERS A W and HAJARNAVIS C R. *Rings in which every complement right ideal is a direct summand* [J]. Quart. J. Math. Oxford., 1977, **28**(2): 61—80.

[2] DUNG NGUYEN V and SMITH P F. $\sum$*-CS-modules* [J]. Comm. Algebra., 1994, **22**(1): 83—93.

[3] CELIK CESIM. HARMANCI ABDULLAH and SMITH P F. *A generalizations of CS-modules* [J]. Comm. Algebra., 1995, **23**(14): 5445—5460.

[4] UTUMI Y. *On rings of which any one-sided quotient rings are two-sided* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**: 141—147.

[5] SANDOMIERSKI F L. *Nonsingular rings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, **19**: 225—230.

[6] DUNG NGUYEN V and SMITH P F. *Hereditary CS-modules* [J]. Math. Scand., 1992, **71**: 173—180.

[7] SMALL L W. *Semihereditary rings* [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**: 656—658.

[8] CHATTERS A W and HAJARNAVIS C R. *Rings with chain conditions* [M]. Pitman, London, 1980.

[9] HILL DIVID A. *Endomorphism rings of hereditary modules* [J]. Arch. Math., 1977, **28**: 45—50.

[10] UTUMI Y. *On continuous rings and selfinjective rings* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **118**: 158—173.

[11] ANDERSON F W and FULLER K R. *Rings and categories of modules* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1974.


# Left Nonsingular Left CS-Rings and Left Hereditary Left CS-Rings


WEI Feng

(Dept. of Math., Jilin University, Changchun 130023, China)



**Abstract**: In this paper we firstly prove: R is a left nonsingular left CS-ring if and only if R is a left co-nonsingular Baer ring. Then we give some characterizations about left hereditary left CS-rings, regular left hereditary left CS-rings and left hereditary left continuous rings.



**Key words**: left CS-ring; left nonsingular ring; left hereditary ring; left continuous ring.