第20卷第3期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 3
2000年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2000

伪对称集的一个代数特征及度量加性质*

林 波
(扬州师范学院数学系，江苏 225002)

摘 要：本文证明了球面有限点集的伪对称性可以完全由其特征多项式的根来刻画，并得到了在度量加运算下伪对称性具有封闭性.

关键词：密集椭球；伪对称集；度量加；特征值；不等式.
分类号：AMS(1991) 51K05/CLC O184
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)03-0451-04

1 引 言

1986年，杨路、张景中教授在文[1]中引进了比密集椭球更强条件的伪对称集的概念.研究点集的伪对称分布作为一项有理论意义和应用价值的课题，成为距离几何研究的热点之一.

文[1]首次研究了有限点集的代数特征，得到了

定理 设σ为E^n中N点构成的点集($N>n$)，则σ为E^n伪对称集的充要条件为σ的特征多项式$f(\lambda)$与次特征多项式$g(\lambda)$满足$Nf(\lambda)=(\lambda-c)g(\lambda)$且$g(\lambda)$只有$n$个非零根，这$n$个非零根相重.

本文证明了球面点集的伪对称性完全可以由其特征多项式的根刻画：

定理1 有限点集$\sigma=\{P_1,\cdots,P_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n(N>n)$为$E^n$伪对称集的充要条件是其特征多项式$f(\lambda)$有根$2NR^2$及另$n$个非零根，这$n$个非零根相重.

迄今为止，伪对称集的研究主要集中在伪对称集的特征，存在性及其与几何不等式的关系等方面，对伪对称集之间的相互关系的研究还较少.度量加是一种重要的运算[6].为此，本文考察了伪对称集在度量加运算下的有关性质，得到了

定理2 两E^n伪对称集$\sigma_i=\{P_{i1},\cdots,P_{iN}\}\subset S^{n-1}(R)$,$(i=1,2)$的度量加$\sigma_3=\{P_{31},\cdots,P_{3N}\}$必为$E^n$伪对称集.

2 定理1的证明

引理1[3] R_1^n为齐秩空间，其秩为$n+2$.

* 收稿日期：1997-09-22；修订日期：1999-06-12
作者简介：林 波(1964-)，男，江苏海安人，硕士，讲师.

引理 2[2]　设 $\sigma=\{P_1,\cdots,P_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n(N>n)A=(a_{ij}^2)$，$F=(2P_i\cdot P_j)$，则

(1) A 的特征值中只有一个为正，且等于 A 的其余负特征值之和反号.

(2) 设 A,F 的特征值按递减顺序排列为 $\lambda_0,0,\cdots,0,-\lambda_n,-\lambda_{n-1},\cdots,\lambda_1$ 及 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n,0,\cdots,0$，则 $\lambda_i\leqslant\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$，且等号当且仅当 σ 的重心为 $S^{n-1}(R)$ 的球心时成立.

引理 3[1]　设 $\sigma=\{P_1,\cdots,P_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n$ 的重心为 $S^{n-1}(R)$ 的球心，则

$$Nf(\lambda)=(\lambda-2NR^2)g(\lambda).$$

引理 4[4]　若有限点集 σ 的凸包是 n 维的，且 σ 关于其重心的惯量椭球是一个球，则 σ 的次特征多项式有 n 个非零重根. 反之亦成立.

定理 1 的证明　*必要性*　若 σ 为 E^n 伪对称集，由引理 3 有

$$Nf(\lambda)=(\lambda-2NR^2)g(\lambda), \tag{1}$$

同时，由伪对称集的概念及引理 4 知 $g(\lambda)$ 恰有相重的 n 个非零根. 结合(1)式知 $f(\lambda)$ 有根 $2NR^2$ 及另 n 个非零重根.

充分性　不妨设 $S^{n-1}(R)$ 的中心在直角坐标系的原点. 由引理 1，R_1^n 中任一元素的秩为 $n+2$，从而 σ 的平方距离矩阵 $A=(a_{ij}^2)$ 的秩至多 $n+1$，即 A 至多有 $n+1$ 个非零特征值. 另一方面 $\sigma\subset E^n$，有 $F=(2P_i\cdot P_j)$ 的秩至多为 n，设 A,F 的特征值按递减顺序排列为

$$\lambda_0,0,\cdots,0,-\lambda_n,-\lambda_{n-1},\cdots,-\lambda_1;\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n,0,\cdots,0.$$

若 $f(\lambda)$ 有根 $2NR^2$，注意到 $\sigma\subset S^{n-1}(R)$，$N>n$，由引理 2 知

$$\lambda_0=2NR^2 \text{ 且 } \lambda_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \tag{2}$$

而矩阵 F 的迹 $\mathrm{tr}(F)=2NR^2$，并且由矩阵特征值的性质 $\mathrm{tr}(F)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i$，(2) 式推出 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\mu_i$，即

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\mu_i)=0. \tag{3}$$

由引理 2，$\lambda_i\leqslant\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$，故(3)式推出

$$\lambda_i=\mu_i(i=1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

再应用引理 2，(4)式即 σ 的重心为 $S^{n-1}(R)$ 的球心. 由引理 3，有关系式

$$Nf(\lambda)=(\lambda-2NR^2)g(\lambda).$$

由条件，$f(\lambda)$ 有根 $2NR^2$ 及其余 n 个非零根，且它们是相重的. 故 $g(\lambda)$ 恰有相重的 n 个非零根，由引理 4 知，σ 关于其重心的密集椭球是一个球.

综上，由伪对称集的概念，σ 为 E^n 伪对称集. 证毕.

由定理 1 证明过程可知

推论 1　有限点集 $\sigma=\{P_1,\cdots,P_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n(N>n)$ 的重心为 $S^{n-1}(R)$ 球心的充要条件是下列条件之一成立.

(1) $f(\lambda)$ 有根 $2NR^2$；

(2) $Nf(\lambda)=(\lambda-2NR^2)g(\lambda)$.

3 定理 2 的证明

引理 5 设球面有限点集 $\sigma_i \subset S^{n-1}(R_i)$，其中 $S^{n-1}(R_i)$为 E^n 中含 σ_i 的球中半径最小的球($i=1,2,3$)，若 σ_3 为 σ_1,σ_2 的度量加，则 $R_3^2 \leqslant R_1^2+R_2^2$.

引理 5 为文[5]中定理 4 的特例.

引理 6[1] 对 E^n 中 N 点之集 $\sigma(N>n)$，有不等式

$$M_4(\sigma) \geqslant \frac{N-1}{N}\frac{n+1}{n}M_2^2(\sigma),$$

等号当且仅当 σ 为 E^n 伪对称集时成立.

定理 2 的证明 记 $S^{n-1}(R_i)$球心 $O_i(i=1,2)$，$\sigma_1 \cup \{O_1\}$与 $\sigma_2 \cup \{O_2\}$的度量加为 $\sigma_3 \cup \{O_3\}$. 由度量加的定义，$|P_{3i}-O_3|^2=|P_{1i}-O_1|^2+|P_{2i}-O_2|^2=R_1^2+R_2^2$，即 σ_3 为球面点集，可记 $S^{n-1}(R_3)$为含 σ_3 的球中半径最小的球(注意这里度量加不会增加点集的维数).

应用恒等式 $(\sum_1^N OP_i)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}(OP_i - OP_j)^2 = N\sum_1^N OP_i^2$ 可以证明，σ_k 的重心 G_k 与外心 $O_k(k=1,2,3)$ 满足

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ijk}^2 = N^2(R_k^2 - C_kG_k^2), k = 1,2,3, \tag{5}$$

其中 $a_{ijk} = |P_{ki} - P_{kj}|$. 由于 σ_1,σ_2 为 E^n 伪对称集，有 $C_1G_1 = C_2G_2 = 0$，从而由度量加的定义及(5) 式有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij3}^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij1}^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij2}^2 = N^2(R_1^2 + R_2^2).$$

进而由(5)式得

$$N^2(R_3^2-C_kG_k^2)=N^2(R_1^2+R_2^2), \tag{6}$$

由此可知

$$R_3^2 \geqslant R_1^2+R_2^2. \tag{7}$$

由惯量等轴的概念易知，$\dim(\operatorname{conv}(\sigma_1))=\dim(\operatorname{conv}(\sigma_2))=n$，故 R_1,R_2 为 σ_1,σ_2 的唯一的外接球半径，从而由引理 5 得

$$R_3^2 \leqslant R_1^2+R_2^2. \tag{8}$$

由(7)，(8)知 $R_3^2=R_1^2+R_2^2$. 代入(6)有 $C_3G_3=0$，即 σ_3 的重心与所在球的球心重合.

另一方面，由 $C_kG_k=0$ 及(5)式知

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ijk}^2 = N^2R_k^2, \quad k = 1,2,3. \tag{9}$$

注意到 σ_1,σ_2 为 E^n 伪对称集，由引理 6 知

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ijk}^4 = \frac{2(n+1)N^2}{n}R_k^4, \quad k = 1,2, \tag{10}$$

从而由柯西不等式推出 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij1}^2 a_{ij2}^2 \leqslant (\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij1}^4 \cdot \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij2}^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{2(n+1)N^2}{n}R_1^2R_2^2$，这样

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij3}^4 &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}(a_{ij1}^2 + a_{ij2}^2)^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij1}^4 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij2}^4 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij1}^2 a_{ij2}^2 \\ &\leqslant \frac{2(n+1)N^2}{n}(R_1^4 + R_2^4 + 2R_1^2R_2^2) = \frac{2(n+1)N^2}{n}(R_1^2 + R_2^2)^2\end{aligned}$$

$$= \frac{2(n+1)N^2}{n}R_3^4.$$

而由引理 6 及(9) 式，有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij3}^4 \geqslant \frac{2(n+1)}{nN^2}\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij3}^2\Big)^2 = \frac{2(n+1)N^2}{n}R_3^4.$$

综合上两个不等式有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij3}^4 = \frac{2(n+1)N^2}{n}R_3^4. \tag{11}$$

综合(9)，(11)及引理 6 易知，σ_3 为 E^n 伪对称集. 证毕.

由(5)式及引理 5 还可以得到关于度量加的不等式：

推论 2 对凸包为 n 维的球面有限点集 $\sigma_i \subset S^{n-1}(R_i)$，其度量加 σ_3 为球面点集，且它们的重心与外心间距离满足不等式

$$C_3G_3^2 \leqslant C_1G_1^2 + C_2G_2^2. \tag{12}$$

衷心感谢蒋声教授对本文工作的悉心指导和帮助.

参考文献：

[1] 杨 路，张景中. 伪对称集与有关的几何不等式 [J]. 数学学报，1986，**29**(6)：802－806.

[2] ZHOU Jia-nong. *Sufficient and necessary condition for a Pseudo-Symmetric point set* [J]. J. of Math. Res. & Expo.，1990，**10**(1)：65－68.

[3] 杨 路，张景中. 抽象距离空间秩的概念 [J]. 中国科学技术大学学报，1980，**10**(4)：1－4.

[4] 杨 路，张景中. 有限点集在伪欧空间的等长嵌入 [J]. 数学学报，1981，**24**(4)：481－487.

[5] ALEXANDER R. *Metric Averaging in Euclidean and Hilbert Spaces* [J]. Pacific Journal of Mathematics，1979，**85**(1)：1－9.

[6] 杨 路，张景中. 度量和与 Alexander 对称化 [J]. 数学年刊 A 辑，1987，**8**(2)：242－253.

An Algebraic Characterization and Metric Sum Property on Pseudo-Symmetric Set

LIN Bo

(Yangzhou Teachers' College，Jangsu 225002，China)

Abstract：In this paper，we show that the Pseudo-Symmetric property of spherical point set can be characterized by the eigen values of eigenpolynomial and it has the closeness under the metric sum operation.

Key words：ellipsoid of inertia；Pseudo-symmetric set；metric sum；eigenvalue；inequality.