关于 $L^2(E_{n+1}^+,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^{n+1}})$ 中的柱面函数空间的正交直和分解*

何 建 勋

(南京师范大学数学系，210097)

摘 要：本文利用小波变换给出了 $L^2(E_{n+1}^+,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^{n+1}})$ 中的柱面函数空间的一种正交直和分解. 在这种分解下定义了 Toeplitz-Hankel 型算子，得到了类似的 Schatten-Von Neumann 性质.

关键词：柱面函数；小波变换；正交直和分解.

分类号：AMS(1991) 22E27,42C15/CLC O174.2

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)03-0455-04

自 A. Grossman 和 J. Morlet[1]引进了一维仿射群下的小波变换后，Q. T. Jiang 和 L. Z. Peng 利用小波变换给出了相应的函数空间的正交直和分解，进而考虑了其上的一些算子理论问题，并且将这些结果推广到高维的情形(参见[2],[3],[4]). 由于上半空间 $E_{n+1}^+=\{(x,y):x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n,y>0\}$ 上的函数理论是数学关心的课题(见[5]). 因此，本文利用小波变换的工具给出了 $L^2(E_{n+1}^+,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^{n+1}})$ 中的柱面函数空间的正交直和分解.

设 $n\geq 2$ 的整数，$\mathbf{IG}(n)$ 是带旋转的 n- 维的 Euclid 群，它可以表示为：$\mathbf{IG}(n)=\{g=(b,a,\rho):b\in\mathbf{R}^n,a>0,\rho\in SO(n)\}$，其中 $SO(n)$ 为特殊的 n 阶正交群. $\mathbf{IG}(n)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上的作用定义为：$g(x)=a\rho x+b$, $g=(b,a,\rho)\in\mathbf{IG}(n)$, $x\in\mathbf{R}^n$. 对于 $g=(b,a,\rho)$, $g_1=(b_1,a_1,\rho_1)\in\mathbf{IG}(n)$，群的乘法法则是 $g_1g=(b_1,a_1,\rho_1)(b,a,\rho)=(a_1\rho_1b+b_1,a_1a,\rho_1\rho)$. 容易验证 $g^{-1}=(-a^{-1}\rho^{-1}b,a^{-1},\rho^{-1})$，群中的单位元为 $(0,1,I)$，其中 I 为 $n\times n$ 单位阵. 群 $\mathbf{IG}(n)$ 是一个非幺模局部紧 Lie 群，左 Haar 测度是 $\mathrm{d}\mu_l(g)=a^{-(n+1)}\mathrm{d}b\mathrm{d}a\mathrm{d}\rho$，右 Haar 测度是 $\mathrm{d}\mu_r(g)=a^{-1}\mathrm{d}b\mathrm{d}a\mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}\rho$ 为 $SO(n)$ 群上的左 Haar 测度. 考虑 $\mathbf{IG}(n)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉表示

$$U(b,a,\rho)f=a^{-\frac{n}{2}}f(a^{-1}\rho^{-1}(x-b)),\quad f\in L^2(\mathbf{R}^n),(b,a,\rho)\in\mathbf{IG}(n).$$

$\mathbf{IG}(n)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉表示 U 是不可约的，而且它还是平方可积表示，即存在 $\psi\in L^2(\mathbf{R}^n)$, $\psi\neq 0$，且满足 $\int_{\mathbf{IG}(n)}|\langle\psi,U(b,a,\rho)\psi\rangle_{L^2(\mathbf{R}^n)}|^2\mathrm{d}\mu_l(g)<+\infty$. 该式被称为可允许条件，$\psi$ 称为可允许小波，并记 $\psi\in AW$. 由[4]知：$\psi\in AW$ 当且仅当 $0<\int_{\mathbf{R}^n}|\hat{\psi}(\xi)|^2\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^n}<+\infty$，其中 $\hat{\psi}(\xi)$ 表示 ψ 的 Fourier 变换，$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}f(t)e^{-2\pi i\xi\cdot t}\mathrm{d}t$，而 $|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}$. 记 $L_r^2(\mathbf{R}^n)=\{f:f\in$

* 收稿日期：1997-07-07；修订日期：1999-11-30

基金项目：国家自然科学基金资助项目(19701025)

作者简介：何建勋(1956-)，男，陕西商州市人，博士，南京师范大学副教授.

$L^2(\mathbf{R}^n)$，且 f 是径向函数}. 如果 ψ 是可允许小波，且 ψ 是径向函数，称 ψ 是径向可允许小波，并记 $\psi \in AW_r$. 由于 $\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^n} = \omega_{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(r)|^2}{r}dr$，其中 ω_{n-1} 为 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面的面积，$\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$，$r = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2)^{\frac{1}{2}}$. 于是有 $\psi \in AW_r$ 当且仅当 $0 < \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(r)|^2}{r}dr < +\infty$.

对于 $f \in L_r^2(\mathbf{R}^n)$，$\psi \in AW_r$，定义小波变换 $(W_\psi f)(b,a,\rho) = \langle f, U(b,a,\rho)\psi\rangle_{L^2(\mathbf{R}^n)}$，并记 $(W_\psi f)(b,a) = \int_{SO(n)} \langle f, U(b,a,\rho)\psi\rangle_{L^2(\mathbf{R}^n)} d\rho$. 令 $P = \{(b,a) : b \in \mathbf{R}^n, a > 0\}$，将 P 与 E_{n+1}^+ 等同起来. 易见，$(W_\psi f)(b,a) \in L^2(E_{n+1}^+, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$. 如果对任何 $\rho \in SO(n)$，$x \in \mathbf{R}^n$，有 $h(\rho x, y) = h(x,y)$，则称 $h(x,y)$ 为 $L^2(E_{n+1}^+, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$ 中的柱面函数. 用 $L_c^2(E_{n+1}^+, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$ 表示柱面函数空间，不难推出：如果 $f \in L_r^2(\mathbf{R}^n)$，$\psi \in AW_r$，则 $(W_\psi f)(b,a) \in L_c^2(E_{n+1}^+, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$. 事实上，

$$
\begin{aligned}
(W_\psi f)(b,a) &= \int_{SO(n)} \langle f, U(b,a,\rho)\psi\rangle_{L^2(\mathbf{R}^n)} d\rho \\
&= a^{-\frac{n}{2}} \int_{SO(n)} d\rho \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{\psi}(a^{-1}\rho^{-1}(x-b))dx \\
&= a^{\frac{n}{2}} \int_{SO(n)} d\rho \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot b} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{\psi}}(a\rho^{-1}\xi)d\xi,
\end{aligned}
$$

由于 $f, \psi \in L_r^2(\mathbf{R}^n)$，故得

$$
\begin{aligned}
(W_\psi f)(b,a) &= a^{\frac{n}{2}} \int_{SO(n)} d\rho \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i\rho\xi\cdot b} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{\psi}}(a\xi)d\xi \\
&= a^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{\psi}}(a\xi)\left(\int_{SO(n)} e^{2\pi i\rho\xi\cdot b}d\rho\right)d\xi.
\end{aligned}
$$

由于 ρ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的正交变换，故为酉变换. 再注意到 $d\rho$ 是 $SO(n)$ 上的左 Haar 测度，对任何 $\rho' \in SO(n)$，$b \in \mathbf{R}^n$，有 $(W_\psi f)(\rho' b, a) = (W_\psi f)(b,a)$，即 $(W_\psi f)(b,a) \in L_c^2(E_{n+1}^+, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$. 下面讨论 $L_c^2(E_{n+1}^+, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$ 的正交直和分解. 对于 $f, g \in L_r^2(\mathbf{R}^n)$，$\psi_1, \psi_2 \in AW_r$，应用 Plancherel 公式得：

$$
\begin{aligned}
\langle W_{\psi_1} f, W_{\psi_2} g\rangle_{L^2(E_{n+1}^+, \frac{dadb}{a^{n+1}})} &= \int_{E_{n+1}^+} (W_{\psi_1} f)(b,a)\,\overline{(W_{\psi_2} g)(b,a)}\,\frac{dbda}{a^{n+1}}) \\
&= \int_{\mathbf{R}^+} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \hat{\psi}_2(a\xi)\,\overline{\hat{\psi}_1(a\xi)}\,\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\right)\frac{da}{a} \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \int_{\mathbf{R}^+} \hat{\psi}_2(a\xi)\,\overline{\hat{\psi}_1(a\xi)}\,\frac{da}{a} \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\hat{\psi}_2(\xi')\,\overline{\hat{\psi}_1(\xi')}}{|\xi'|^n}d\xi' \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \\
&= \langle \psi_1, \psi_2\rangle_{AW} \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbf{R}^n)},
\end{aligned}
$$

其中 $\langle \psi_1, \psi_2\rangle_{AW} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\hat{\psi}_2(\xi)\,\overline{\hat{\psi}_1(\xi)}}{|\xi|^n}d\xi$. 特别，当 $\psi_1 = \psi_2 = \psi$，$f = g$ 时，有

$$\| W_\psi f \|^2_{L^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}})} = (\int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(r)|^2}{r} dr) ||f||^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

令 $Z^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\nu > -1$, $\kappa \in Z^+$, $L_\kappa^{(\nu)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\kappa} \binom{\kappa+\nu}{\kappa-\mu} \frac{(-x)^\mu}{\mu!} = \frac{1}{m!} e^x x^{-\nu} (\frac{d}{dx})^\kappa (e^{-x} x^{k+\nu})$ 是 Laguerre 多项式，由[6]，它们满足下面的正交关系：

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\nu L_\kappa^{(\nu)}(x) L_{\kappa'}^{(\nu)}(x) dx = \Gamma(\nu+1) \binom{\kappa+\upsilon}{\kappa} \delta\kappa\kappa'.$$

对于 $\nu > -1, \kappa \in Z^+$，以 Fourier 变换来定义径向小波函数 ψ 如下：

$$\hat{\psi}_\kappa(\xi) = \Gamma(\nu+1)^{-\frac{1}{2}} \binom{\kappa+\upsilon}{\kappa}^{-\frac{1}{2}} |2\xi|^{\frac{\nu+1}{2}} e^{-|\xi|} L_\kappa^{(\nu)}(2|\xi|).$$

容易验证$\{\psi_\kappa : \kappa \in Z^+\}$是一列规范正交小波函数，它们在 $L^2(0, +\infty)$是完备的(见[6]). 记 $A_\kappa = \{(W_{\psi_\kappa} f)(b, a) : f \in L_r^2(\mathbf{R}^n)\}$，则有下面的

定理 1 $L_e^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}}) = \bigoplus_{\kappa=0}^{\infty} A_\kappa$.

证明 明显，A_κ 是 $L_e^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$的子空间，且 $A_\kappa(\kappa=0,1,2,\ldots)$相互正交，只需指出 $L_e^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}}), \subset \bigoplus_{\kappa=0}^{\infty} A_\kappa$ 即可. 事实上，若 $f \in L_e^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$，对 $f(x,y)$的第一个变量应用 Plancherel 公式，有

$$\| f \|^2_{L^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}})} = \int_0^{+\infty} (\int_{\mathbf{R}^n} |f(x,y)|^2 dx) \frac{dy}{y^{n+1}} = \int_0^{+\infty} (\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi, y)|^2 dx) \frac{dy}{y^{n+1}}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} (\int_0^{+\infty} |\hat{f}(\xi, y)|^2 \frac{dy}{y^{n+1}}) dx < +\infty.$$

对几乎所有的 $\xi \in \mathbf{R}^n$, $y^{-\frac{n+1}{2}} \hat{f}(\xi, y)$视为 y 的函数应属于 $L^2(\mathbf{R}^+)$，令

$$\beta_\kappa(y) = \Gamma(\nu+1)^{-\frac{1}{2}} \binom{\nu+\kappa}{\kappa}^{-\frac{1}{2}} (2|\xi|)^{\frac{\nu+1}{2}} e^{-y|\xi|} y^{\frac{\nu}{2}} L_\kappa^{(\nu)}(2y|\xi|).$$

则可以验证$\{\beta_\kappa(y) : \kappa \in Z^+\}$是 $L^2(\mathbf{R}^+)$的标准正交基，于是 $y^{-\frac{n+1}{2}} \hat{f}(\xi, y) = \sum_{\kappa=0}^{+\infty} \alpha_\kappa(\xi) \beta_\kappa(y)$. 由于 $f \in L_e^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$，则 $\hat{f}(\xi, y) \in L_e^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$，即 $\hat{f}(\xi, y)$ 关于第一个变量 ξ 是径向的，于是 $\alpha_\kappa(\xi)$ 是径向函数，令 $f_\kappa \in L_r^2(\mathbf{R}^n)$，且使 $\hat{f}_\kappa(\xi) = \alpha_\kappa(\xi)$，于是

$$\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{\kappa=0}^{\infty} (W_{\psi_\kappa} f_\kappa)(x, y) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\xi = y^{\frac{n}{2}} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \hat{f}_\kappa(\xi) \hat{\psi}_\kappa(y\xi) = y^{\frac{n+1}{2}} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa(\xi) \beta_\kappa(y) = \hat{f}(\xi, y).$$

于是有 $f(x,y) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} W_{\psi_\kappa} f_\kappa(x, y)$，定理 1 得到了证明.

设 $P_\kappa(\kappa \in Z^+)$是由 $L_e^2(E^+_{n+1}, \frac{dxdy}{y^{n+1}})$到 A_κ 上的正交投影，定义 Toeplitz-Hankel 型算子：$T_{b,\kappa,l} = P_\kappa M_b P_l$，其中 M_b 是由 b 产生的乘算子，而 $b(x,y)$对 x 变量进行 Fourier 变换有 $\hat{b}(\xi, y) = e^{-|\xi|y} \hat{b}(|\xi|)$. 令 $B_p^{\frac{n}{p}, p}(\mathbf{R}^n)$ 表示 Besov 空间，$B_r^p = \{b \in B_p^{\frac{n}{p}, p}(\mathbf{R}^n) : b(, y)$ 关于第一个变量是径向的$\}$. 如果 $b(x,y)$ 的边界函数 $b(x) \in B_r^p$，则称 $b \in B_r^p$. 用 S_p 表示 Schatten-Von Neumann 类(参见[7]，[8])，于是由[3]可以得到

定理 2 若 $T_{b,\kappa,l}$是上述定义的 Toeplitz-Hankel 型算子,则

(1) 当 $\kappa=l$ 时,$T_{b,\kappa,l}\in S_\infty$当且仅当 $b\in L^\infty$;如果 $b\neq 0$,则 $T_{b,\kappa,l}$非紧.

(2) 当 $\kappa\neq l$,且$\frac{n}{|\kappa-l|}<p\leq\infty$时,$T_{b,\kappa,l}\in S_p$ 当且仅当 $b\in B_p^p$.

(3) 当 $\kappa\neq l$,$0<p\leq\frac{n}{|\kappa-l|}$,且 $T_{b,\kappa,l}\in S_p$,则 $b=0$.

参考文献:

[1] GROSSMAN A and MORLET J. *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape* [J]. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 1984, **15**: 723—736.

[2] JIANG Q T and PENG L Z. *Wavelet transform and Toeplitz Hankel type operators* [J]. Mathematica Scandinavica, 1992, **70**: 247—264.

[3] JIANG Q T and PENG L Z. *Phase space, wavelet transform and Toeplitz Hankel Type operators* [J]. Israel Journal of Mathematics, 1995, **89**: 157—171.

[4] MURENZI R. *Wavelet transforms associated to the n-dimensional Euclidean group with dilations* [M]. In wavelets, Time-Frequency Methods and phase space, J. Combes et al. eds, Springer-verlag, Berlin, 1989.

[5] STEIN E M and WEISS G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces* [M]. Princeton University press, 1971.

[6] SZEGÖ G. *Orthogonal polynomials* [M]. American Mathematical Society Colloquium publication 23, 1939.

[7] JANSON S and PEETRE J. *Paracommutators-boundedness and Schatten-Von Neumann properties* [J]. Transaction of the American Mathematical Soceity, 1988, **305**: 467—504.

[8] PENG L Z. *Paracommutator of Schatten-Von Neumann class Sp*, $0<p<1$ [J]. Mathematica Scandinavica, 1987, **61**: 68—92.

The orthogonal direct sum decomposition of cylindrical function space in $L^2(E_{n+1}^+,\frac{dxdy}{y^{n+1}})$

HE Jian-xun

(Dept. of Math., Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: In this paper, we give the orthogonal direct sum decomposition of cylindrical function space in $L^2(E_{n+1}^+,\frac{dxdy}{y^{n+1}})$ by using wavelet transform. Under this decomposition we define the Toeplitz-Hankel type operators and obtain the similar Schatten-Von Neumann properties for those operators.

Key words: cylindrical function; wavelet transform; orthogonal direct sum decomposition.