第20卷第3期　数学研究与评论　Vol. 20 No. 3
2000年8月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 2000

广义逆矩阵特征性质的注记*

刘德钦，　袁尚明

（南京理工大学应用数学系，210014）

摘　要：本文运用线性算子方法进一步探讨了一般数域上矩阵广义逆的特征性质，同时也分别简化和修正了文献[1]中定理2.3.5和定理2.3.6给出的矩阵广义逆 A^- 的结果.

关键词：广义逆算子；广义逆矩阵；投影算子；象空间；零空间；直和.

分类号：AMS(1991) 15A09/CLC O151.21

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)03-0464-05

1　定　义

设 F 是数域，$V_n[F]$ 和 $U_m[F]$ 分别为 F 上的 n 维和 m 维线性空间

定义1　设 L 是 $V_n[F]\to U_m[F]$ 的线性算子，G 是 $U_m[F]\to V_n[F]$ 的线性算子. 若 $LGL=L$，则称 G 为 L 的一个广义逆算子.

用矩阵的语言表述，即有

定义2　设 $A\in F^{m\times n}$，$A^-\in F^{n\times m}$. 若 $AA^-A=A$，则称 A^- 为 A 的一个广义逆矩阵. A 的所有广义逆 A^- 组成的集合记为 $A\{1\}$.

2　特征性质

定理1　设 L 是 $V_n[F]\to U_m[F]$ 的线性算子，G 是 $U_m[F]\to V_n[F]$ 的线性算子，则 G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons$ 对任一 $y\in R(L)$ 有 $LG(y)=y$.

证明　*必要性*　设 $y\in R(L)$，因 $y=L(x)$，$x\in V_n[F]$，故 $LG(y)=LGL(x)=L(x)=y$.

充分性　设 $x\in V_n[F]$，令 $y=L(x)\in R(L)$，则 $LGL(x)=LG[L(x)]=LG(y)=y=L(x)$. 故 $LGL=L$，即 G 是 L 的广义逆算子.　□

用矩阵的语言表述，则有

定理1′　设 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times m}$，则 $B\in A\{1\}\rightleftharpoons$ 对任一 $y\in R(A)$ 有 $(AB)y=y$.

定理2　设 L 是 $V_n[F]\to U_m[F]$ 的线性算子，G 是 $U_m[F]\to V_n[F]$ 的线性算子，则 G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons G[R(L)]$ 是 $N(L)$ 的补，且将 L 看成 $G[R(L)]\to R(L)$ 的线性算子，G 看成

* 收稿日期：1997-07-14
作者简介：刘德钦(1945-)，男，湖南人，南京理工大学副教授.

$R(L)\to G[R(L)]$ 的线性算子时，则 G 是 L 的逆算子. 此处 $G[R(L)]$ 是 $R(L)$ 在 G 下的象.

证明 *必要性* 显然 $G[R(L)]$ 是 $V_n[F]$ 的子空间，且 G 是 $R(L)\to G[R(L)]$ 的满射. 设 $y_1,y_2\in R(L)$，且 $y_1\neq y_2$，则 $G(y_1)\neq G(y_2)$，事实上，若 $G(y_1)=G(y_2)$，则由 $LG(y_1)=LG(y_2)$ 和定理 1 有 $y_1=y_2$，此与 $y_1\neq y_2$ 矛盾，这表明 G 又是 $R(L)\to G[R(L)]$ 的单射，故 G 是 $R[L]\to G[R(L)]$ 的同构，从而 $\dim G[R(L)]=\dim R(L)$.

再设 $x\in N(L)\cap G[R(L)]$，则 $x=G(y)$，$y\in R(L)$，且 $L(x)=0$. 由定理 1，$y=LG(y)=L[G(y)]=L(x)=0$，从而 $x=G(y)=G(0)=0$. 这表明 $N(L)+G[R(L)]$ 是直和. 于是 $\dim\{N(L)\oplus G[R(L)]\}=\dim N(L)+\dim G[R(L)]=\dim N(L)+\dim R(L)=n$，故 $L_n[F]=G[R(L)]\oplus N(L)$，即 $G[R(L)]$ 是 $N(L)$ 的补，现将 L 看成 $G[R(L)]\to R(L)$ 的线性算子，G 看成 $R(L)\to G[R(L)]$ 的线性算子，因对任一 $y\in R(L)$，由定理 1，$LG(y)=y$，故 $LG=E$，此处 E 是 $R(L)$ 上的单位算子. 这表明 G 是 L 的逆算子，至于充分性则显然. □

定理 2 从实质上准确地说明了广义逆的含义. 由定理 2 直接可得

定理 3 设 L 是 $V_n[F]\to U_m[F]$ 的线性算子，G 是 $U_m[F]\to V_n[F]$ 的线性算子，则 G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons G[R(L)]$ 是 $N(L)$ 的补，且对任一 $x\in G[R(L)]$ 有 $GL(x)=x$.

用矩阵的语言表述，则有

定理 3′ 设 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times m}$，且 $B[R(A)]=\{x\,|\,x=By,y\in R(A)\}$，则 $B\in A\{1\}\rightleftharpoons F^n=B[R(A)]\oplus N(A)$，且对任一 $x\in B[R(A)]$ 有 $(BA)x=x$. 此处 F^n 是 F 上的 n 维向量空间.

定理 3′ 说明，在文献[1] 定理 2.3.6 中条件(1) 中的 T 不仅是 $N(A)$ 的补，而且 $T=B[R(A)]$. 条件(2)是不必要的. 下面的实例也说明了条件(2)不是必要条件.

例 设

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}\in R^{3\times 3},$$

则

$$B=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-1&-1&1\end{bmatrix}\in R^{3\times 3}$$

是 A 的一个广义逆. 由

$$R(A)=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

可知 $R(A)$的任一补 S 都是 R^3 中的一维子空间. 因 $|B|=\frac{1}{2}\neq 0$，故在 $R(A)$的任一补 S 中都有使 $By\neq 0$ 的向量 y.

现在将文献[1]中的定理 2.3.4 用线性算子语言陈述出来，并给出其证明. 为此有

引理 1 设 L 是 $V_n[F]\to U_m[F]$的线性算子，G 是 L 的广义逆算子，则

$$N(GL)=N(L), R(LG)=R(L).$$

证明 因 $LGL=L$,故 $N(GL)\subseteq N[L(GL)]=N(L)$,又 $N(L)\subseteq N(GL)$,故 $N(GL)=N(L)$. 同法可证 $R(LG)=R(L)$. □

定理 4 设 L 是 $V_n[F]\to U_m[F]$ 的线性算子,G 是 $U_m[F]\to V_n[F]$ 的线性算子,则

(1) G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons (GL)^2=GL$,且 $\text{rank}(GL)=\text{rank}(L)$

(2) G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons (LG)^2=LG$,且 $\text{rank}(LG)=\text{rank}(L)$

证明 (1) 与(2) 的证法类似,只证(1).

必要性 由 $LGL=L$ 即知 $(GL)^2=GL$. 由引理 1 $N(GL)=N(L)$,故

$$\text{rank}(GL)=\text{rank}(L).$$

充分性 由 $N(L)\subseteq N(GL)$ 和 $\text{rank}(GL)=\text{rank}(L)$ 知 $N(L)=N(GL)$. 设 $x\in V_n[F]$,且 $LGL(x)=y\in R(L)$,$L(x)=y_1\in R(L)$. 由 $(GL)^2=GL$ 有 $G(y)=GLGL(x)=GL(x)=G(y_1)$,故 $G(y-y_1)=0$. 因 $y-y_1\in R(L)$ 故 $y-y_1=L(x_1)$,$x_1\in V_n[F]$,于是 $GL(x_1)=G(y-y_1)=0$,即 $x_1\in N(GL)=N(L)$,从而 $y-y_1=L(x_1)=0$,即 $y=y_1$. 由此有 $LGL(x)=L(x)$,即 $LGL=L$. □

用矩阵语言表示,则有

定理 4′ 设 $A\in F^{m\times n}$,$B\in F^{n\times m}$,则

(1) $B\in A\{1\}\rightleftharpoons(BA)^2=BA$ 且 $\text{rank}(BA)=\text{rank}(A)$.

(2) $B\in A\{1\}\rightleftharpoons(AB)^2=AB$ 且 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(A)$.

这就是文献[1] 中定理 2.3.4. 下面再改善一下文献[1] 中的定理 2.3.5,为此有

引理 2 设 L 是 $V_n[F]\to U_m[F]$ 的线性算子,G 是 L 的广义逆算子,则 $N(LG)$ 是 $R(L)$ 的补.

证明 设 $y\in N(LG)\cap R(L)$,则 $LG(y)=0$ 且 $y=L(x)$,$x\in V_n[F]$. 因 $LGL=L$,故 $y=L(x)=LGL(x)=LG(y)=0$,从而 $N(LG)+R(L)$ 是直和,由定理 4,$\text{rank}(LG)=\text{rank}(L)$,于是 $\dim[N(LG)\oplus R(L)]=\dim N(LG)+\dim R(L)=\text{null}[N(LG)]+\text{rank}(LG)=m$,故 $U_m[F]=N(LG)\oplus R(L)$. □

定理 5 设 L 是 $V_n[F]\to U_m[F]$ 的线性算子,G 是 $U_m[F]\to V_n[F]$ 的线性算子,则

(1) G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons GL=P_{G[R(L)],N(L)}$,此处 $P_{G[R(L)],N(L)}$ 是 $V_n[F]$ 中的沿着 $N(L)$ 到 $G[R(L)]$ 的投影算子.

(2) G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons LG=P_{R(L),N(LG)}$,此处 $P_{R(L),N(LG)}$ 是 $U_m[F]$ 中的沿着 $N(LG)$ 到 $R(L)$ 的投影算子.

证明 (1) 与(2) 的证明类似,只证(1).

必要性 显然,GL 是 $V_n[F]$ 的线性算子,又由定理 2,$G[R(L)]$ 和 $N(L)$ 是 $V_n[F]$ 的两个互补的子空间. 若 $x\in N(L)$,则 $GL(x)=0$,若 $x\in G[R(L)]$,则 $x=G(y)$,$y\in R(L)$. 因 $y=L(x_1)$,$x_1\in V_n[F]$,故 $x=G(y)=GL(x_1)$,从而 $GL(x)=(GL)^2(x_1)$. 由定理 4,$(GL)^2=GL$,故 $GL(x)=GL(x_1)=x$. 综上所述,$GL=P_{G[R(L)],N(L)}$.

充分性 因 $GL=P_{G[R(L)],N(L)}$,故 $(GL)^2=GL$,且由 $R(GL)=G[R(L)]$ 又有 $\text{rank}(GL)=\dim R(GL)=\dim G[R(L)]=n-\dim N(L)=\dim R(L)=\text{rank}(L)$. 于是再由定理 4,知 G 是 L 的广义逆算子. □

用矩阵的语言表述，则有

定理 5′ 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$，则

(1) $B \in A\{1\} \rightleftharpoons BA = P_{B[R(A)],N(A)}$，此处 $P_{B[R(A)],N(A)}$ 是以 $N(A)$ 为零空间以 $B[R(A)]$ 为值空间的投影矩阵.

(2) $B \in A\{1\} \rightleftharpoons AB = P_{R(A),N(AB)}$，此处 $P_{R(A),N(AB)}$ 是以 $N(AB)$ 为零空间以 $R(A)$ 为值空间的投影矩阵.

定理 5′ 不仅简化了文献[1]中定理 2.3.5 给出的矩阵广义逆的特征性质，而且使它得到了更准确的陈述.

最后，本文给出矩阵广义逆的两个有趣的特征性质.

定理 6 设 L 是 $V_n[F] \to U_m[F]$ 的线性算子，G 是 $U_m[F] \to V_n[F]$ 的线性算子，则

(1) G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons N(L) = R(E_1 - GL)$. 此处 E_1 是 $V_n[F]$ 的单位算子.

(2) G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons R(L) = N(E_2 - LG)$. 此处 E_2 是 $U_m[F]$ 的单位算子.

证明 (1) 与 (2) 的证明类似，只证 (1).

必要性 由定理 5，$GL = P_{G[R(L)],N(L)}$，于是 $N(L) = N(GL) = R(E_1 - GL)$.

充分性 设 $x \in V_n[F]$，因 $(E_1 - GL)(x) \in R(E_1 - GL) = N(L)$，故 $(L - LGL)(x) = L(x) - LGL(x) = L[(E_1 - GL)(x)] = 0$，从而 $LGL = L$，即 G 是 L 的广义逆算子. □

用矩阵的语言表述，则有

定理 6′ 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$，则

(1) $B \in A\{1\} \rightleftharpoons N(A) = R(I_n - BA)$，此处 I_n 是 n 阶单位阵.

(2) $B \in A\{1\} \rightleftharpoons R(A) = N(I_m - AB)$，此处 I_m 是 m 阶单位阵.

注意到 $N(A) \subseteq R(I_n - BA)$ 和 $N(I_m - AB) \subseteq R(A)$，由定理 6′ 直接可得

定理 6″ 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$，则

(1) $B \in A\{1\} \rightleftharpoons \mathrm{null}(A) = \mathrm{rank}(I_n - BA)$.

(2) $B \in A\{1\} \rightleftharpoons \mathrm{rank} A = \mathrm{null}(I_m - AB)$.

这实际上就是文献[1]中的定理 2.3.8.

定理 7 设 L 是 $V_n[F] \to U_m[F]$ 的线性算子，G 是 $U_m[F] \to V_n[F]$ 的线性算子，则

(1) G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons V_n[F] = N(L) \oplus N(E_1 - GL)$.

(2) G 是 L 的广义逆算子 $\rightleftharpoons U_m[F] = R(L) \oplus R(E_2 - LG)$.

其中 E_1 和 E_2 分别为 $V_n[F]$ 和 $U_m[F]$ 的单位算子.

证明 (1) 与 (2) 的证明类似，只证 (1).

必要性 由定理 5，$GL = P_{G[R(L)],N(L)}$，故 $(GL)^2 = GL$ 且 $R(GL) = G[R(L)]$，又由定理 2，$V_n[F] = G[R(L)] \oplus N(L)$，于是 $V_n[F] = N(L) \oplus R(GL) = N(L) \oplus N(E_1 - GL)$.

充分性 因 $V_n[F] = N(L) \oplus N(E_1 - GL)$，故 $\mathrm{null}(L) = n - \mathrm{null}(E_1 - GL) = \mathrm{rank}(E_1 - GL)$. 再注意到 $N(L) \subseteq R(E_1 - GL)$，则 $N(L) = R(E_1 - GL)$. 由定理 6 知 G 是 L 的广义逆算子.

用矩阵语言表述，则有

定理 7′ 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$，则

(1) $B \in A\{1\} \rightleftharpoons F^n = N(A) \oplus N(I_n - BA)$.

(2) $B\in A\{1\}\rightleftharpoons F^m=R(A)\oplus R(I_m-AB)$.
其中 F^n 和 F^m 分别为 F 上的 n 维和 m 维向量空间，I_n 和 I_m 分别为 n 和 m 阶单位阵.

参考文献：

[1] 何旭初，孙文瑜. 广义逆矩阵引论[M]. 南京：江苏科学技术出版社，1991.

[2] 何旭初. 广义逆矩阵的基本理论和计算方法 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1985.

[3] 程云鹏. 矩阵论 [M]. 西安：西北工业大学出版社，1989.

Notes on The Characteristic Properties for Generalized Inverses of Matrices

LIU De-qin, YUAN Shang-ming

(Dept. of Appl. Math., Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210014, China)

Abstract: In this paper, using the linear operator method, we study characteristic properties for generalized inverses of matrices on general number field and reduce or modify the results of theorems 2.3.5 and 2.3.6 in [1]

Key words: generalized inverse operator; generalized inverse matrix; projection operator; resemble space; zero space; straight sum.