试论"应用数学的基础研究课题"*

李 乔
(上海交通大学应用数学系，200030)

摘 要：本文表述对"应用数学的基础研究课题"这一概念的含义和内容的一些见解.

关键词：应用数学；基础研究.
分类号：AMS(1991) 00A69,00A30/CLC O1.0
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)03-0469-04

本文拟对"应用数学的基础研究课题"这一概念的内涵及有关性质提出一些个人见解.这些见解谈不上深刻，但却明确而不含糊.主要内容曾在1997年10月武汉举行的全国组合数学学术会议上报告过，也在国内一些大学讲过.现在整理成文发表，希望能得到同行的指教，在真正意义上抛砖引玉.

促使我思考这个问题有两个具体的个人背景.一是在申请国家自然科学基金资助时一定要填写的项目属性：是A(基础研究)还是B(应用基础)？我都是选B，因为自认为从事研究的是"应用数学的基础研究课题"；二是在讲课和编写讲义时为了阐明课程的指导思想，使得能够名正言顺地展开具体内容，不得不一开始就讨论"应用数学的基础研究课题"这一概念.我讲的课程叫"网络组合论"，其内容是网络拓扑的分析和设计，对象是应用数学专业的(硕士和博士)研究生.我是这样开始我的讲义(和讲课)的："我们将论述这样一个应用数学的基础研究课题：对各种通信网络中节点之间的连接模式——或称网络的拓扑结构，简称网络拓扑(network topology)——进行数学理论研究，所研究的网络拓扑是静态的有限结构，因而主要的数学模型和用以研究的数学是图论(graph theory).近二、三十年来，对这一课题的研究相当活跃.在通信和计算机技术高速发展的强劲推动下，很多相关的图论新概念、新问题和新结果应运而生，目前似乎已到了可以、而且需要作一阶段性小结的时候".

应该说，除了上述具体的个人背景外，探讨这个概念还有更大、更深刻的大背景.首先是关于数学的本质、所谓的"纯数学"(或"基础数学")与"应用数学"的区分、数学科学与客观的物理世界的关系等一系列深刻的数学哲学问题，它们在历史上一直受到全世界思想家的关注[1].其次是我国在廿世纪五十年代后期，与"大跃进"相呼应的席卷全国数学界的名谓关于数学联系实际的"大辩论"，这其实是一场政治性运动，当时轰轰烈烈、大张旗鼓的情景，经历者想必记忆犹新(可参看[2]的记述).但是四十多年过去了，从探求真理、提高认识水平的角度，对这场

* 收稿日期：1998-02-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19971056)
作者简介：李 乔(1938-)，男，江苏常州人，教授，博士生导师.
作者谨以此文祝贺徐利治教授八十华诞.

空前规模的关于数学与客观世界关系进行认真的回顾和总结的工作至今尚未见到.本文只是试图回答上述两个有具体个人背景的问题的产物,无意直接探讨这些大背景所提出的问题,但却有必要从数学科学这个大背景说起.

随着历史的演进,人们对数学的作用已逐渐形成共识,即认为数学对人类社会的发展大有用.这一点至少在浅层次上几乎已成定论,虽然在深层次上尚待探讨,例如,目前似乎还难以令人信服地在哲学层次上回答像这样的基本问题:为什么数学能“大有用”?另一方面,广大数学工作者和科技人员至少已经感觉到,数学科学在本质上不同于自然科学,现对此稍作解说.

数学的定义方式很多,在素有权威之称的各种版本的百科全书和数学百科全书里,对数学的定义也各有说法.我比较赞赏前苏联数学家 A.D. 阿力山大洛夫的明确而又精辟的表述[3].首先,他把数学定义为“关于与内容相脱离的形式和关系的科学”,并进一步强调,“数学与其它科学相比有着独特的地位,这是因为,它在研究自然界、社会以及思维领域中的形式和关系时,舍弃了内容且不准借助观察和实验进行论证.因此不能把数学列为自然科学或者社会科学”.我国科学家钱学森在论及数学科学时也这样认为[4]:“照我的看法,现代科学技术有十大部门.自然科学当然是一个部门,社会科学也是一个,第三个就要排到数学科学了.接下去是思维科学、系统科学、人体科学、军事科学,文艺理论、行为科学、地理科学,一共十个,不是老概念,好象只有自然科学和社会科学.”联系到前面所说的“数学大有用”的共识,自然会提出这样的问题:既然数学不以研究对象的实在内容为己任,那么它又怎么能在研究和处理现实对象的实在内容的科学技术中起重要作用呢?它又是以什么方式起作用的呢?这里主要探讨的是后面的问题.

瑞典数学家 L.戈丁在探讨人类认识世界的机制时,提出了“现实——模型——理论”三元组的思想[5].他以自然数、天体力学、量子力学、经济学以及语言作为解释这种三元组的实例.论及应用数学,美籍科学家林家翘(C. C. Lin)和 L. A. 塞格尔在他们的著作中写道[6]:“应用数学的目的在于运用数学来阐明科学概念和描述科学现象,并通过这样的研究来促进新数学的发展.把数学用于推进科学理解的过程可以合适地分成如下三步:

(i) 用数学语言表述科学问题.

(ii) 对所建立的数学问题求解.

(iii) 解释所求得的解并用科学语言作实际检验.”

在贤哲们的真知灼见的启示下,我把一个“应用数学的基础研究课题”理解为由现实世界的特定问题(简称实际问题,记为 PP)、相应的数学模型(记为 MM)、以及在数学模型基础上建立的数学理论(记为 MT)组成的三元结构,并示意图解如下:

$$\begin{tikzcd} PP \arrow[r] & MM \arrow[r] & MT \arrow[r, dashed] \arrow[ll, dashed, bend left] & {} \end{tikzcd}$$

在这个图解中,从 MT 返回 PP 的虚有向边表示从数学理论的部分内容返回到实际问题的微妙反馈,它以某种方式补充到原先的实际问题,从而可能修正先前建立的数学模型,形成新一轮循环.而从 MT 向右的虚有向边则表示数学理论一旦形成,它就具有自己的生命,并按自身的发展逻辑自主发展.这一趋向与前面引用的林家翘等论及应用数学目的时所说的“促进新数学的发展”相符.至于这里所用的“数学模型”的概念,借用我国数学家徐利治的提法[7],“乃是针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系,采用形式化数学语言,概括地或近似地表述出来的一种数学结构.当然,这种数学结构应该是借助于数学概念和符号刻划出来的某种系统的**纯关系结构**.所谓纯关系结构是指已经扬弃了一切与关系无本质联系的属性后的系

统而言”；“从广义上讲，数学中各种基本概念，如实数、向量、集合、群、环、域、范畴、线性空间、拓扑空间等等都可以叫做数学模型，因为它们都是以各自相应的原型(实体)作为背景而加以抽象出来的数学概念”；“但按狭义解释，只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系结构才叫作数学模型”. 为避免扩大论题，我们对“数学模型”一词都按照这种狭义解释.

现在可以提出这样一个基本观点，估计它容易得到认可：

A. 数学科学必须通过数学模型的中介才能与现实世界沟通.

下面讨论三元结构的图解中从 PP 到 MM、从 MM 到 MT 和从 MM 返回 PP 的有向边. 有不少实际问题——例如大量可以用日常语言表述的所谓“智力难题”，如著名的哥尼斯堡(Konigsberg)七桥问题——不难抽象成数学问题，而后者的解也完全解答了原先的问题. 如果说，对此用“实际问题，数学模型，数学理论”的三元结构来解释未免显得矫揉造作、小题大做，因为这时的“三元”几乎混然一体；那么，现今人们面临的大量待解的实际问题则大多非常复杂，数学科学想要以“应用数学课题”的方式主动参加进去并真正发挥作用，则势必纳入前面所说的三元结构，通过数学模型的中介方有可能，这个道理比较明显. 但由于现今面临的实际问题大多是深层次的而且涉及众多方面的复杂问题，因此单靠数学家的智慧和思维方式很难把握问题的实质，更不用说建立真正有意义的相应数学模型了. 另外，对同一问题往往可以建立不止一个数学模型；基于不同的数学模型又可以得到多种数学结论，所以对于回答“如何评估所得数学结论在原来实际问题上的意义?”甚至“数学结论究竟应作怎样的解释?”等等重要问题，数学家也难有作为. 所以这里再提出两个基本观点.

B. 建立数学模型的工作，主要应由现今被称为“理论 x 学家”或“y 学数学家”——如“理论计算机科学家”或“化学数学家”——来承当. 数学家至多可以从数学的角度使模型更“数学化”.

C. 从事“应用数学的基础研究课题”研究的数学家的本职，是在该课题中所建立的数学模型的基础上做数学研究. 至于数学家研究得到的数学理论对原来的实际问题究竟有多少参考价值，从根本上说是数学以外的事，数学家很难参予.

数学家在应用数学的基础研究课题中所能起的作用和应该扮演的角色，和前面所引用的数学科学的定义以及它不同于自然科学和社会科学的认识完全相符. 其中“数学家的本职是在该课题中所建立的数学模型的基础上做数学研究”这一简单明白的思想，并不像听起来那样是没有意义的同语反复. 以往的历史表明，这是一种值得强调的基本思想.

现在对前面的讨论作两点重要补充.

1. 从事“(应用)数学的应用研究课题”和从事“应用数学的基础研究课题”的数学家的任务至少有两方面不同：

1.1 前者必须真正参加建立数学模型的工作，以对实际问题有更切实和具体的了解，从而使参予建立的数学模型更切实地反映实际.

1.2 前者必须十分关注所得数学结论对实际问题的作用，换句话说，要把从 MT 返回 PP 的虚有向边变成实的，使三元结构真正循环起来.

所以，对前者的要求，在一定的意义上更多、更高.

2. 以上对“应用数学的基础研究课题”的讨论仍然基于经典(或传统)的观念，这种观念现在也许正面临巨大挑战. 正如美国数学家、前任国际数学家联盟(IMU)主席 D. 芒福德所指出的那样[8]：“由于所有模型从根本上说是不完善的(因为它们只孤立考虑了自然界复杂性的少数几个方面)，所以用模拟的方法去检验模型通常就成为真正的关键. 自从 Lorentz 模拟他的三维动力系统以来，多少年已经过去了，但是没有任何人能严格地分析他的系统. 对于非线性

微分方程这是典型的. Hodgkin 和 Huxeley 因为他们用偏微分方程族作神经传导模型的研究而获得诺贝尔奖. 他们的工作中决定性的论据是他们的计算机模拟,它正确地推断出传导的速率而使误差在 10 个百分点之内. 但是只在一些极度简化的情况,他们的方程被证明能引起稳定的移动波. …上述这些案例对我们的教益是,缺少证明或没有适定提法的模型,都不能阻止好的应用数学建模”.

芒福德的意见(或问题)也许在探讨数学科学与客观世界的关系方面比这里所初步讨论的更重要,也更有意义,但二者毕竟不是同一个问题,所以也只能点到为止了.

回到我们的数学哲学的大背景. 数学科学的作用当然远不止参予解决各种实际问题. 这里仅摘录英国数学家、哲学家 A. N. 怀特海(1861—1947)1939 年 12 月 15 日在哈佛大学演讲中的一段意味深长的话来结束我们初步和局限的讨论. 下面是我国数学家胡世华对这段话的译文(引自[4]).

“鉴于供数学研究的范围的无限广阔,这门科学,即使是现代数学,也还是处于婴儿时期. 如果文明继续进步,在今后两千年内,在人类思想领域里具有压倒性的新的情况,将是数学地理解问题要占统治地位.”

哲人离开人间已半个多世纪了,文明在继续进步,特别是科学技术的发展正以前所未有的力量改变着地球和人类社会. 现在没有人敢于预测那怕两百年后的情况. 不知道对哲人关于数学还处于婴儿时期的断言现在应作何评价,但对“数学地理解问题”在人类思想领域里地位的预言则肯定尚待历史来检验.

参考文献:

[1] 邓东皋,等. 数学与文化 [M]. 北京:北京大学出版社,1990.

[2] 王 元. 华罗庚 [M]. 开明出版社, 1994.

[3] 阿力山大洛夫 A D. 苏联《哲学百科全书》中“数学”条目(1964 年版第 3 卷). 中译文刊于《数学哲学论文集》,林夏水主编,知识出版社,1986.

[4] 钱学森. 发展我国的数学科学 [J]. 数学进展, 1990, 19: 129—132.

[5] 戈丁 L. 数学概观 [M], 胡作玄. 北京: 科学出版社, 1984.

[6] LIN C C and SEGAL L A. *Mathematics applied to deterministic problems in the natural sciences* [M]. Macmillan Pub. Co. Inc., 1974. Ch. 1 pp. 4—8: ‘On the nature of applied mathematics’, 中译文将发表在《数学译林》杂志.

[7] 徐利治. 数学方法论选讲 [M]. 武汉:华中工学院出版社,1983.

[8] MUMFORD D. *Calculus reform~for the millions* [M]. Notices of AMS, 44(1997), 559—563, 中译文刊于《数学译林》1997 年第 4 期, 347—352.

On the Concept of “a fundamental research topic of applied mathematics”

LI Qiao

(Dept. of Appl. Math., Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: This paper presents some views on the meaning and contents of the concept of ‘a fundamental research topic of applied mathematics’.

Key words: applied mathematecs; fundamental research.