第20卷第4期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 4
2000年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2000

不定方程解的 δ-组合计数方法及应用*

阴东升， 沈复兴
（北京师范大学数学系，100875）

摘 要：运用徐利治和 Peter Jau-Shyong Shiue 的 Kronecker δ 符号的组合计数方法，可以给出一般算术方程 $f(X)=m$ 在给定区域内的解之计数公式，由此可产生无穷多个组合恒等式，并能引出一些不等式.

关键词：方程；δ-组合计数方法；恒等式.
分类号：AMS(1991) 05A19,11/CLC O157.1,O156
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)04-0534-05

1 方程解的 δ-组合计数方法

文[1]证明，Diophantine 方程 $x^a+y^b=m$ 之正整数解的个数

$$N(x^a+y^b=m)=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{u\geqslant 1}\sum_{v\geqslant 1}\binom{u}{x^a}\binom{v}{y^b}\binom{m+1}{u+v+1}(-1)^{x+y+u+v} \tag{1}$$

$(u,v,x,y\in[1,m-1])$，并进而得到了

$$\mathrm{FLT}\longleftrightarrow\sum_{x=1}^{m}\sum_{y=1}^{m}\sum_{u=1}^{m^n-1}\sum_{v=1}^{m^n-1}\binom{u}{x^n}\binom{v}{y^n}\binom{m^n+1}{u+v+1}(-1)^{x+y+u+v}=0$$

$(n\geqslant 3)$的结论，此处 FLT 为 Fermat's Last Theorem 之缩写. 为了清楚地看到(1)的产生思路，[1]中的推求过程可改写为：

$$\begin{aligned}N(x^a+y^b=m)&=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\delta(m,x^a+y^b)=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\delta(m+1,x^a+y^b+1)\\&=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{s=2}^{m}(-1)^{s+x^a+y^b}\binom{s+1}{x^a+y^b+1}\binom{m+1}{s+1}\\&=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{s=2}^{m}(-1)^{s+x^a+y^b}\Big[\sum_{u=1}^{s}\binom{u}{x^a}\binom{s-u}{y^b}\Big]\binom{m+1}{s+1}\\&\overset{s-u=v}{=\!=}\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{u\geqslant 1}\sum_{v\geqslant 1}\binom{u}{x^a}\binom{v}{y^b}\binom{m+1}{u+v+1}(-1)^{u+v+x+y}.\end{aligned}$$

⊙

从中可见，这里有三个关键点，一是 Kronecker 符号 $\delta(s,t)$ 的利用；二是运用 δ 关于一些变换(平移、伸缩等)的不变性；三是对 δ 运用有关的表达式，然后对变换后的项再进行恒等转换，以

* 收稿日期：1997-05-26
作者简介：阴东升(1964-)，男，河北容城人，北京师范大学在站博士后，烟台师范学院兼职教授.

达到满意的结果. 将这种基于 δ 的计数方法称为 δ-组合计数法. 通过改变二、三步的具体内容,这种方法可以展示给人们许多相应的结果.

2 算术方程解的计数公式及 FLT 的其它等价组合恒等式

自变量取值为正整数的函数是算术函数;与之对偶地,称函数值是正整数的函数为反向算术函数. 若 $f(X)$ 是反向算术函数,则称方程 $f(X)=m$(m 为正整数)为算术方程.

运用 ⊙ 的推导过程可得

定理 1 设 X 是个变向量,$f_i(X)(i=1,2)$ 在区域 S 上是反向算术函数,m 是正整数,则 $f_1(X)+f_2(X)=m$ 在 S 上的解的个数

$$N[(X\in S)\wedge(f_1(X)+f_2(X)=m)]$$
$$=\sum_{X\in S}\sum_{u=1}^{m-1}\sum_{v=1}^{m-1}\binom{u}{f_1(X)}\binom{v}{f_2(X)}\binom{m+1}{u+v+1}\cdot(-1)^{u+v+f_1(X)+f_2(X)},$$

当 $\sum X+f_1(X)+f_2(X)\equiv 0(\bmod 2)$ 时,上式中(-1)的指数变成 $u+v+\sum X$. 其中 $\sum X$ 表示 X 中分量之和.

(1) 是它在 $X=(x,y)$, $f_1(X)=x^a$, $f_2(X)=y^b$, $S=N^2(N=\{1,2,\cdots\})$ 的情形.

将 ⊙ 用于 $\delta(m,f(X))=\delta(\lambda m+k_1+k_2+1,\ \lambda f(X)+k_1+k_2+1)$,可得更具概括性的

定理 2 设 $\lambda\in N$,m、$K_i\in N\cup\{0\}$, $f_i(X)$ 是 S 上的反向算术函数,$i=1,2$. $f(X)=f_1(X)+f_2(X)$, 则

$$N[(X\in S)\wedge(f(X)=m)]$$
$$=\sum_{X\in S}\sum_{u\geqslant 1}\sum_{v\geqslant 1}\binom{u}{\lambda f_1(X)+k_1}\binom{v}{\lambda f_2(X)+k_2}\binom{\lambda m+k_1+k_2+1}{u+v+1}(-1)^{u+v+\lambda f(X)+k_1+k_2},$$

其中 $u,v\in[1,\lambda m+k_1+k_2-1]$. 当 $\sum X+\lambda f(X)+k_1+k_2\equiv 0(\bmod 2)$ 时,(-1) 指数变成 $u+v+\sum X$;当 $\sum X+\lambda f(X)+k_1+k_2\equiv 1(\bmod 2)$ 时,(-1) 指数变成

$$u+v+\sum X+1.$$

将 ⊙ 的推导思想用到朱世杰恒等式[2]

$$\binom{m+1}{s+1}=\sum_{k=1}^{m}\binom{k}{s}$$

上便得到

定理 3 $m,f(X)\in N,X\in S$. 则

$$N[X\in S)\wedge(f(X)=m)]=\sum_{X\in S}\sum_{s\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\binom{k}{s}\binom{s+1}{f(X)+1}(-1)^{s+f(X)},$$

其中 $s,k\in[1,m]$. $\sum X+f(X)\equiv 0(\bmod 2)$ 时,(-1) 指数是 $s+\sum X$.

将其用到 $x^a+y^b=m^n$ 上便有

推论 1 FLT$\longleftrightarrow\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{s\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\binom{k}{s}\binom{s+1}{x^a+y^b+1}(-1)^{x+y+s}=0$,其中 $x,y\in N,s,k\in[1,m^n],m\geqslant 2,\ n\geqslant 3$.

只对 δ 运用一下恒等式

$$\delta(n,j)=\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\binom{n}{k}^{[1]}$$

可产生简单的计数公式

定理 4 $N[(X\in S)\wedge(f(X)=m)]=\sum_{X\in S}\sum_{s=1}^{m}\binom{m}{s}\binom{s}{f(X)}(-1)^{s+f(X)}.$

推论 2 FLT$\longleftrightarrow\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{s=1}^{m^n}\binom{m^n}{s}\binom{s}{s^a+y^b}(-1)^{s+x+y}=0$，此处 $m\geqslant 2, n\geqslant 3$.

当 $X=(x,y)$ 时，定理4给出的是 rank 3 的组合式，从具体计算量的角度讲，它比(1)或许容易些.

不对 $\delta(m,f(X))$ 进行变换，对 $\binom{m}{s}$ 运用已知的恒等式

$$\binom{x+y}{x}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x+y-n}{x-k}^{[2]},$$

于⊙的推求思路，得到

定理 5

$$N[(X\in S)\wedge(f(X)=m)]=\sum_{X\in S}\sum_{\substack{u+v\leqslant m\\ u,v\in[0,m]}}\binom{f(X)}{u}\binom{m-f(X)}{v}\binom{u+v}{f(X)}(-1)^{u+v+f(X)}.$$

推论 3

$$\text{FLT}\longleftrightarrow\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{u+v\leqslant m^n;u,v\in[0,m^n]}\binom{x^a+y^b}{u}\binom{m^n-x^a-y^b}{v}\binom{u+v}{x^a+y^b}(-1)^{u+v+x+y}=0.$$

同样，不对 δ 变换，而对 $\binom{m}{s}$ 运用 Gould-Sprugnoli 恒等式[3]

$$\sum_{k=s}^{n}\left(\frac{r-ps}{r-qk}\right)\binom{r-qk}{k-s}\binom{p+qk}{n-k}=\binom{p+r}{n-s},$$

于 ⊙ 的推求过程，并注意到 $\sum_{v=0}^{n}\sum_{u=v}^{m}=\sum_{u=0}^{m}\sum_{v=0}^{u}$，可有

定理 6

$$N[(X\in S)\wedge(f(X)=m)]$$
$$=(-1)^m\sum_{X\in S}\sum_{u=0}^{m}\sum_{v=0}^{u}\frac{m-v-v^2}{m-v-qu}\binom{m-v}{f(X)}\binom{m-v-qu}{u-v}\binom{v+qu}{m-u}(-1)^{f(X)-v}.$$

推论 4

$$\text{FLT}\longleftrightarrow\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{u=0}^{m^n}\sum_{v=0}^{u}\frac{m^n-v-v^2}{m^n-v-qu}\binom{m^n-v}{x^a+y^b}\binom{m^n-v-qu}{u-v}\binom{v+qu}{m^n-u}(-1)^{x+y-v}=0.$$

3 恒等式及不等式

上述诸公式构成了建立组合恒等式的一个丰富源泉．我们既可以通过变换公式中的参数(比如定理 2、6)来建立恒等式，也可以通过将不同的公式连接起来而得恒等式；在丢番都

(Diophantine)方程情形，由于很多借助于发生函数的方法得到了具体的解之计数公式，因而当将这些结果与组合公式联系起来时，也得到一些恒等式．因为仅用参数取具体值的方法就能得到无穷多的恒等式，故此，δ-组合计数方法产生恒等式的能力是很大的．对上述三类恒等式，下面各举一例．

例 1

$$\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{u=1}^{m-1}\sum_{v=1}^{m-1}\binom{u}{x^a}\binom{v}{y^b}\binom{m+1}{u+v+1}(-1)^{u+v+x+y}$$
$$=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{u=1}^{2m+1}\sum_{v=1}^{2m+1}\binom{u}{2x^a+1}\binom{v}{2y^b+1}\binom{2m+3}{u+v+1}(-1)^{u+v}.$$

例 2

$$\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{u=1}^{m-1}\sum_{v=1}^{m-1}\binom{u}{x^a}\binom{v}{y^b}\binom{m+1}{u+v+1}(-1)^{u+v+x+y}$$
$$=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}\binom{v}{u}\binom{u+1}{x^a+y^b+1}(-1)^{u+x+y}.$$

例 1 是定理 2 参数取两次特殊值的结果，例 2 是(1)和定理 3 的连接．

例 3 用发生函数的方法可知，方程 $x+2y+3z=n$ 的非负整数解的个数为 $\langle\frac{1}{12}(n+3)^2\rangle$[2]，另一方面，由⊙的思路易推知

$$N\{[(x\geqslant 0)\wedge(y\geqslant 0)\wedge(z\geqslant 0)]\wedge[(x+2y)+3z=n]\}$$
$$=\sum_{x\geqslant 0}\sum_{y\geqslant 0}\sum_{z\geqslant 0}\sum_{u+v=0}^{n}\binom{u}{x+2y}\binom{v}{3z}\binom{n+1}{u+v+1}(-1)^{u+v+x+z},$$

从而得到恒等式

$$\sum_{x\geqslant 0}\sum_{y\geqslant 0}\sum_{z\geqslant 0}\sum_{u+v=0}^{n}\binom{u}{x+2y}\binom{v}{3z}\binom{n+1}{u+v+1}(-1)^{u+v+x+z}=\langle\frac{1}{12}(n+3)^2\rangle.$$

除了恒等式，δ-组合计数方法还可产生一些不等式．

例 4 将定理 4 用于 $\binom{k}{x}=n$，并考虑到二项系数的单峰性，可知

$$0\leqslant\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\binom{n}{y}\left[\begin{matrix} y\\ \binom{2m}{x}\end{matrix}\right](-1)^{y+\binom{2m}{x}}\leqslant 1,$$

$$0\leqslant\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant 1}\binom{n}{y}\left[\begin{matrix} y\\ \binom{2m+1}{x}\end{matrix}\right](-1)^{y+\binom{2m+1}{x}}\leqslant 2.$$

4 一个注记

δ-组合计数法中 δ 的表达式一般与正交函数有关．关于有关的系统解说，将于另文给出．

参考文献:

[1] HSU L C and Peter Jau-Shyong Shiue. *On a combinatorial expression concerning Fermat's Last Theorem* [J]. Advances in applied mathematics, 1997, **18**: 216—219.

[2] 徐利治,蒋茂森,朱自强. 计算组合数学 [M]. 上海:上海科技出版社,1983.

[3] RENZO S. *Riordan arrays and the Abel—Gould identity* [J]. Discrete Mathematics, 1995, **142**: 225.

δ-Combinatorial Counting Method Concerning Solutions of Diophantine Equations and Some Applications

YIN Dong-sheng, SHEN Fu-xing

(Dept. of Math., Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: L. Hsu and Peter Shiue's δ-combinatorial counting method can be used to produce fomulas for the numbers of solutions of arithmetic equations, some combinatorial identities as well as certain inequalities.

Key words: arithmetic equation; δ-combinatorial counting method; combinatorial identity.