第20卷第4期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 4
2000年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2000

# JC代数的乘子代数*

赖 弋 新
(青岛大学师范学院数学系，266071)

**摘 要**：本文用双中心子刻画了JC代数的乘子代数，并且研究了复$C^*$-代数的自伴部分的乘子代数生成的$C^*$-代数与原$C^*$-代数的乘子代数之间的关系，最后研究了JB代数的扩张.

**关键词**：双中心子；JC-代数.
**分类号**：AMS(1991) 47B35/CLC O177.1
**文献标识码**：A **文章编号**：1000-341X(2000)04-0567-05

## 1 复$C^*$-代数的自伴部分的乘子代数

设$u$为复$C^*$-代数，$u_{sa}$关于$\circ$构成JC代数，本部分主要证明了对于一类特殊$C^*$代数，$M(C^*(Asa))\cong C^*(M(u_{sa}))$.

**引理1.1** [4命题1]：设$u$为$C^*$-代数，$u_{sa}$为其自伴部分，$b\in A_{sa}^{**}$，则$b\in M(A_{sa})$当且仅当$ab$和$ba\in A$，$\forall\ a\in A$.

由此，可推出

**推理1.2** $u$为$C^*$-代数，$u_{sa}$为其自伴部分，则$M(u_{sa})=M(u)_{sa}$.

**证明** 由[6]§1.4.2知$(u_{sa})^{**}=(u^{**})_{sa}$，由乘子代数的定义及引理1.1可得

**命题1.3** 设$u$为复$C^*$-代数，且无一维表示，则$C^*(M(u_{sa}))\cong M(C^*(u_{sa}))$.

**证明** 设$\psi$为$u_{sa}$到$C^*(u_{sa})$上的典型嵌入，则$\psi(u_{sa})C^*$生成$C^*(u_{sa})$，$\varphi$为$C^*(u_{sa})$上的序为2($\varphi^2=1$)的$*$反自同构，满足$\varphi\cdot\psi=\psi$，设$\psi^{**}$，$\varphi^{**}$分别是$\psi$，$\varphi$在$u_{sa}^{**}$到$C^*(u_{sa})^{**}$，$C^*(u_{sa})^{**}$到$C^*(u_{sa})^{**}$上的正常扩张，由于$u_{sa}\cdot C^*(u_{sa})$弱$*$稠于$u_{sa}^{**}$，$C^*(u_{sa})^{**}$，故仍有$\varphi^{**}\psi^{**}=\psi^{**}$，$\varphi^{**}$为$C^*(u_{sa})^{**}$中序为2的$*$-反自同构，令$\psi_M=\psi^{**}|M(u_{sa})$，$\varphi_M=\varphi_{**}|M(C^*(Asa))$. 下证①$\psi_M(M(u_{sa}))\subseteq M(C^*(u_{sa}))$；②$\varphi_M(MC^*(u_{sa}))=M(C^*(u_{sa}))$；③$\psi_M(M(u_{sa}))C^*$生成$M(C^*(u_{sa}))$，这样，由[5]命题4.4知$C^*(M(u_{sa}))\cong M(C^*(u_{sa}))$.

由[6]§7.4.15知$C^*(u_{sa})\subseteq u\oplus u^\circ$，由[6]7.1.11和$C^*(u_{sa})^{**}=W^*(u_{sa}^{**})=u^{**}\oplus u^{**\circ}$，这是因为$uw^*$稠于$u^{**}$而$u$无一维表子，故$u^{**}$无一维表示，①设$a\in M(u_{sa})\subseteq u_{sa}^{**}\subseteq u^{**}$，则由[6]Th7.4.14及$u_{sa}$弱$*$稠于$u_{sa}^{**}$知，$\psi_M(a)=a\oplus a^\circ\in u^{**}\oplus u^{**\circ}$，任给$c\oplus d^\circ\in u\oplus u^\circ=c^*(u_{sa})$，则$(a\oplus a^\circ)(c\oplus d^\circ)=ac\oplus(da)^\circ$，因为$a\in M(u_{sa})$，由引理2.1知$ac$，

* 收稿日期：1997-10-14；修订日期：1999-07-13
作者简介：赖弋新(1965- )，男，硕士，青岛大学师范学院讲师.

$da \in u$ 所以 $(a \oplus a^{\circ})(c \oplus d^{\circ}) \in C^{*}(u_{sa})$，同理可得 $(c \oplus d^{\circ})(a \oplus a^{\circ}) \in C^{*}(u_{sa})$，故 $a \oplus a^{\circ} \in M(C^{*}(u_{sa}))$.

② 由于 $\varphi^{**}$ 为 $\varphi$ 的正常扩张，显然 ② 成立，从而有 $\varphi_M \psi_M = \psi_M$.

③ 由 $C^{*}(u_{sa})$ 及 $C^{*}(u_{sa})^{**}$ 的结构知，$M(C^{*}(u_{sa})) = M(u) \oplus M(u)^{\circ}$，再由推论 2.2，$M(u_{sa}) = M(u)_{sa}$ 及 ①$\psi_M(M(u_{sa})) = \{a \oplus a^{\circ}; a \in M(u_{sa})\}$，故 $\psi_M(M(u_{sa}))C^{*}$ 生成 $M(C^{*}(u_{sa}))$.

**命题 2.4** $Z$ 为局部紧的 Hausdorff 空间，$C_0^C(Z)$ 表示 $Z$ 上的复连续函数，且在无复为 0，$C_0(Z) = \{f \in C_0^C(Z): f(x) \in R, \forall\, x \in Z\}$，则 $C^{*}(M(C_0(Z))) = M(C_0^C(Z))$.

**证明** 因为 $C_0(Z)^{**} = L_{\infty}(Z,u)$，其中 $u$ 为左 Haar 测度，$C_0^C(Z)^{**} = L_{\infty}^C(z,u)$，于是 $C^{*}(C_0(Z)) = C_0^C(Z)$，所以 $C^{*}(M(C_0(Z))) \cong M(C_0^C(Z))$.

## 2 双中心子

**定义 2.1** $A$ 为 JC 代数，$C^{*}(u)$ 为 $A$ 的泛 $C^{*}$-代数，$A$ 上的双中心子为 $(\rho_1,\rho_2)$，称 $(\rho_1,\rho_2)$ 为 $C^{*}$ 中的双中心子，且任给 $y \in A$，$\rho_1(y) + \rho_2(y) \in A$.

类似于 $C^{*}$-代数情况，有下面定义

**定义 2.2** $A$ 为 JC 代数，$C^{*}(A)$ 为 $A$ 的泛 $C^{*}$-代数，$(H\pi)$ 为 $C^{*}(A)$ 的泛表示，把 $A$，$C^{*}(A)$ 看成 $H$ 上的有界线性算子，

$$M_H(A) = \{x \in B(H)_{sa}; x \cdot A \subset A\},$$

称 $M_H(A)$ 为 $A$ 在 $H$ 上的乘子代数.

**证明** 由于 $AC^{*}$ 生成 $C^{*}(A)$；$C^{*}(A)$ 在 $H$ 中为非退化的，所以 $A$ 在 $H$ 中为非退化的，类似于 $C^{*}$ 代数，若 $\{d_l\}$ 为 $A$ 的一个逼近单位元，由于 $A$ 是非退化的，则 $d_l \xrightarrow{S \cdot T} 1_H$，任给 $x \in M_u(A)$，$x \circ d_l \xrightarrow{S \cdot T} x$，又 $x \circ d_l \in A$，所以 $x \in \overline{A}^{s} = A^{**}$（因为 $C^{*}(A)^{**} = \overline{C^{*}(A)}^{s}$），显然 $A \subset M_H(A)$，$A = M_H(A) \Leftrightarrow 1 \in A$.

**命题 2.3** $A$ 为 JC 代数，$C^{*}(A)$，$H$ 同定义 2.2，$\{d_l\}$ 为 $A$ 的一个逼近单位，任给 $A$ 上的双中心子，则 $X = S \circ T - \lim_l \rho_1(d_l) = S \circ T - \lim_l \rho_2(d_l)$ 存在，且映射 $(\rho_1,\rho_2) \to x = S \circ T - \lim_l \rho_1(d_l) = S \circ T - \lim_l \rho_2(d_l)$ 为 $A$ 上的双中心子到 $M_H(A)$ 上的等距双射，这里 $\|(\rho_1,\rho_2)\| = \|\rho_1\| = \|\rho_2\|$.

**证明** 由[7]命题 2.12.7 知，$x = S \circ T - \lim_l \rho_1(d_l) = S \circ T - \lim_l \rho_2(d_l)$ 存在，且 $\|x\| = \|(\rho_1,\rho_2)\| = \|\rho_1\| = \|\rho_2\| = \|x\|$，并且任给 $y \in C^{*}(A)$，$\rho_1(y) = xy$，$\rho_2(y) = yx$，由于 $d_l \in A$，所以 $\rho_1(d_l) + \rho_2(d_l) \in A$，故

$$zx = S \circ T - \lim_l \rho_1(d_l) + S \circ T - \lim_l \rho_2(d_l) \in \overline{A}^{s} = A^{**};$$

又任给 $y \in A$，$\rho_1(y) + \rho_2(y) = xy + yx \in A$，因此 $x \in M(A)$.

反之，任给 $x \in M_H(A)$，令 $\rho_1(y) = xy$，$\rho_2(y) = yx$，任给 $y \in C^{*}(A)$，则 $(\rho_1,\rho_2)$ 为 $C^{*}(A)$ 上的双中心子，且任给 $y \in A$，$\rho_1(y) + \rho_2(y) = 2x \cdot y \in A$，故 $(\rho_1,\rho_2)$ 为 $A$ 上的双中心子. □

**定义 2.4** 对于 $C^*(A)$ 上的二个双中心子 $(\rho_1,\rho_2)(\rho_1',\rho_2')$，$\lambda,u\in C$.

$\lambda(\rho_1,\rho_2)+\mu(\rho_1',\rho_2')=(\lambda\rho_1+\mu\rho_1')(\lambda\rho_2+\mu\rho_2')$，$(\rho_1,\rho_2)(\rho_1',\rho'_2)=(\rho_1\rho_1',\rho_2'\rho_2)$

$(\rho_1,\rho_2)^*=(\rho_2^*,\rho_1^*)$，$\rho_i^*(a)=\rho_i(a^*)^*$，$\forall\, a\in a^*(A),i=1,2$

则 $D(C^*(A))=\{(\rho_1,\rho_2);(\rho_1,\rho_2)$ 为 $C^*(A)$ 上的双中心子$\}$ 构成 $*$ 一代数(参见[7]定义2.12.8及[3])

若 $(\rho_1,\rho_2)$，$(\rho_1',\rho_2')$ 为 $A$ 上的双中心子，$\lambda,\mu\in R$，显然 $\lambda(\rho_1,\rho_2)+\mu(\rho_1',\rho_2')$，$(\rho_1,\rho_2)^*$，$(\rho_1,\rho_2)\circ(\rho_1',\rho_2')=\frac{1}{2}((\rho_1,\rho_2)(\rho_1',\rho_2')+(\rho_1',\rho_2')(\rho_1,\rho_2))$ 都是 $A$ 上的双中心子，事实上，任给 $a\in A$，$\rho_2^*(a)+\rho_1^*(a)=\rho_1(a^*)^*+\rho_2(a^*)^*=\rho_1(a)+\rho_2(a)\in A$，$\rho_1\circ\rho_1'(a)+\rho_1'\circ\rho_1(a)+\rho_2'\circ\rho_2(a)\in A$.

令 $D(A)=\{(\rho_1,\rho_2)\in D(C^*(A));(\rho_1,\rho_2)$ 为 $A$ 上的双中心子$\}$，显然，$(D(A),\circ)$ 构成 $D(C^*(A))$ 的 Jordan 子代数.

**命题 2.5** $A$ 为 JC 代数，$C^*(A)$ 为 $A$ 的泛 $C^*$ 代数，$(\pi,H)$ 为 $C^*(A)$ 的泛表示，则 $M(A)$，$MH(\pi(A))$，$D(A)$ 为 Jordan 同构的，进一步，$\{\pi|_A,H\}$ 可以唯一扩张成 $M(A)$ 上 Jordan 表示，仍记为 $\{\pi,H\}$，则 $\pi(M(A))=M_H(\pi(A))$.

**证明** 令 $B=\pi(A)$，$E=\pi(C^*(A))$，则 $B$ 为 $H$ 中非退化的 JC 代数，由[7]命题 2.12.7 知 $\varphi;x\to(Lx,Rx)$ 为从 $M_H(E)$ 到 $D(E)$ 上双射，由命题 2.3 知它在 $M_H(B)$ 上的限制为 $M_H(B)$ 到 $D(A)$ 上的双射，由[7]命题 2.12.9 知 $\varphi$ 为 $M_H(E)$ 到 $D(E)$ 上的代数 $*$-同构，若 $x\in M_H(B)$，则 $x^*=x$，所以

$$(L_x,R_x)=(L_x,R_x)^*,(L_{xoy},R_{xoy})=\frac{1}{2}(L_xL_y+L_yL_x,R_xR_y+R_yR_x)$$
$$=\frac{1}{2}(L_xR_x)(L_yR_y)+\frac{1}{2}(L_yR_y)(L_xR_x)=(L_xR_x)\circ(L_yR_y),$$

所以 $\varphi|M_H(D)$ 为 $M_H(B)$ 到 $D(A)$ 上的等距 Jordan 同构，显然 $D(A)$ 与 $D(B)$ 为 Jordan 同构，其它证明可类似[7]命题 2.12.9 的后半部分的证明. □

## 3 JB 代数的扩张

在[3]一文中对 $C^*$ 代数的扩张类进行了刻画，对 JB 代数也有类似结果，有许多证明是类似的，我们省去，只给出与 JB 代数有关部分的证明.

**定义 3.1** 设 $A,C$ 为 $JB$ 代数，$A$ 被 $C$ 的一个扩张定义为一个短正合列. $0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to D$，其中 $B$ 为 JB 代数，$f,g$ 为 Jordan 同态.

[5]一文中证明了泛 $C^*$-运算为一个共变函子且为正合的，即

**引理 3.2** ([5]Th4.2) 设 $A,C$ 为 JB 代数，则 $A$ 被 $C$ 的任一扩张可诱导出一个 $C^*(A)$ 被 $A^*(C)$ 的一个扩张.

**命题 3.3** $A$、$C$ 为 $JB$ 代数，$E_1:0\to A\xrightarrow{f_1}B_1\xrightarrow{g_1}C\to 0E_2:0\to A\xrightarrow{f_2}B_2\xrightarrow{g_2}C\to 0$ 为 $A$ 被 $C$ 的产生的二个扩张，若 $E_1,E_2$ 等价，则 $C^*(E_1):0\to C^*(A)\xrightarrow{\hat{f}_1}C^*(B_1)\xrightarrow{\hat{g}_1}C^*(C)\to 0$，$C^*(E_2):0\to C^*(A)\xrightarrow{\hat{f}_2}C^*(B_2)\xrightarrow{\hat{g}_2}C^*(C)\to 0$ 为等价的.

**证明**　由引理 3.1 下图是可换的，其中 $\theta$ 为 $B_1$ 到 $B_2$ 上的 Jordan 同构

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^*(A) \arrow[r, "\hat{f}_1"] \arrow[ddd, bend right=60, "I_{C^*(A)}"'] & C^*(B_1) \arrow[r, "\hat{g}_1"] \arrow[ddd, bend left=40] & C^*(C) \arrow[r] \arrow[ddd, bend left=60, "I_{C^*(C)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\hat{f}_1"] \arrow[u, "\psi_A"] & B_1 \arrow[r, "\hat{g}_1"] \arrow[u, "\psi_{B1}"] \arrow[d, "\theta"] & C \arrow[r] \arrow[u, "\psi_C"] \arrow[d, "I_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\hat{f}_2"] \arrow[u, "I_A"] \arrow[d, "\psi_A"] & B_2 \arrow[r, "\hat{g}_2"] \arrow[d, "\psi_{B_2}"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\psi_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^*(A) \arrow[r, "\hat{f}_2"] & C^*(B_2) \arrow[r, "\hat{g}_2"] & C^*(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $\hat{\theta}$ 为 $\psi_{B_2}\theta$ 在 $C^*(B_1)$ 上的扩张，即 $\hat{\theta}\psi_{B1}=\psi_{B_2}\theta$，由泛 $C^*$-代数的唯一性可知 $\hat{\theta}$ 为一个 Jordan 同构，由于 $\hat{f}_i,\hat{g}_i(i=1,2)\hat{\theta}$ 为 $C^*$ 同态及 $C^*(A),C^*(C),C^*(B_i)$ 分别由 $\psi_A(A),\psi_c(C)$，$\psi_{Bi}(Bi)C^*$-生成的，通过运算可以证明下图可换

$$\begin{array}{lccccccccc}
C^*(E_1) & 0 \to & C^*(A) & \to & C^*(B_1) & \to & C^*(C) & \to 0 \\
 & & \downarrow I_c^*(A) & & \downarrow \hat{\theta} & & \downarrow I_c^*(C) & \\
C^*(E_2) & 0 \to & C^*(A) & \to & C^*(B_2) & \to & C^*(C) & \to 0
\end{array}$$

□

**引理 3.4**（[6]命题 4.4）　设 $A,B$ 为 JB 代数，$\varphi$ 为 $A$ 到 $B$ 中的 Jordan 同态，且 $\forall\, a\in A$，$\|\varphi(a)\|\leqslant\|a\|$，且 $\varphi(A)$ 为 $B$ 中的 JB 子代数，若 $\varphi$ 为单射，则它为距.

类似于[3]命题 4.2 的证明，应用引理 3.4 可证明下面

**命题 3.5**　设 $A,C,C'$ 为 JB 代数，令 $E:0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 为 $A$ 的 $C$ 扩张，$\gamma:C'\to C$ 上的 Jordan 同态，则存在 JB 代数 $B'$ 及 Jordan 同态 $f_1:A\to B',g':B'\to C',\theta:B'\to B$ 满足

① 序列 $Er:0\to A\xrightarrow{f'}B'\xrightarrow{g'}C\to 0$ 为 $A$ 的 $C$ 扩张.

② 下列图可换

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C & \to 0 \\
 & \downarrow I_A & & \downarrow \theta & & \downarrow r & \\
0\to & A & \to & B & \to & C & \to 0
\end{array}$$

进一步在等价定义下 $Er$ 是唯一的.

用 $[Er]$ 表示 $Er$ 的等价类，下面我们证明本部分的重要定理，设 $A$ 为 JB 代数，$M(H)$ 为 $H$ 的乘子代数，则 $A$ 为 $M(A)$ 的 Jordan 闭理想，用 $\mu_0$ 表示自然嵌入，用 $O(A)$ 表示商代数 $M(A)/A$，用 $\pi$ 表示 $M(A)$ 到 $O(A)$ 的自然嵌入，用 $E^\circ$ 表示正合列：$0\to A\xrightarrow{\mu_0}M(A)\xrightarrow{\pi}O(A)\to 0$，称 $O(A)$ 为 $A$ 的外乘子代数，若 $\rho,\theta$ 为 JB 代数，用 $\mathrm{Hom}(\rho,\theta)$ 表示 $\rho$ 到 $\theta$ 中的 Jordan 同态的全体.

**引理 3.6**　$B$ 为 JB 代数，$A$ 为 $B$ 的 Jordan 闭理想，则存在唯一的 Jordan 同态：$\sigma:B\to M(A)$，使得任给 $a\in A,\sigma(a)=A$.

**证明**　由于 $A^{**}$ 可看成 $A$ 在 $B^{**}$ 中的弱 $*$ 闭，又由于 $A$ 为 $B$ 中的 Jordan 闭理想，及 $La$ 运算在 $B^{**}$ 中是弱 $*$ 连续的，故 $A^{**}$ 为 $B^{**}$ 中的弱 $*$ 闭 Jordan 理想，由[6]4.3.6 知存在 $B^{**}$ 中的中心投影 $e$，使得 $A^{**}=B^{**}e$，由于 $U_e$ 为 $B^{**}$ 上的 Jordan 同态，故 $\sigma:\begin{matrix}B\to M(A)\\ b\to U_eb\end{matrix}$ 为

一个 Jordan 同态且满足条件;若 $\sigma: B \to M(A)$ 满足条件的 Jordan 同态,则任给 $b \in B, a \in Ab \circ a = \sigma(b \circ a) = \sigma(b) \circ \sigma(a) = \sigma(b) \circ a$ 在 $A$ 中取网,使它弱 * 收敛于 $e$,则有 $\sigma(b) = b \cdot e = U_e b, \forall\, b \in B$,所以 $\sigma$ 唯一. □

类似于[3]定理 4.3 的证明,证满时应用引理 3.6,有下面定理

**定理 3.7** 从 $\mathrm{Hom}(C, O(H))$ 到 $\mathrm{Ext}(C, A)$ 上的映射 $r \to [Er]$ 为双射.

## 参考文献:


[1] AKEMANN C A, PEDERSON S K. *Complecation of Semicontinuity in $C^*$-algebra theory* [J]. Ouke Math J., 1973, **10**: 785—795.

[2] AKEMANN C A, PEDERSAN G K and TOMIYAMA J. *Mutipliers of $C^*$-algebras* [J]. J. funct, And B, 1973, 277—301.

[3] BUSBY R C. *Double Centralizers and Extensions of $C^*$ —algebras Tran* [J]. Amer. Math. Soc., 1968, **132**: 79—99.

[4] EDWARDS C M. *Multipliers of JB-algebra* [J]. Math. Ann., 1980, **249**: 265—272.

[5] HANCHE-OLSEN H. *On the structure and tensor products of JC-algebras* [J]. Can. J. Math., 1983, **35**: 1059—1024.

[6] HANCHE OLSEN H and STORMER E. *Jordan operator algebras* [J]. Amer. Math. Soc., 1985, **112**: 457—473.

[7] LI Bing-ren. *Introduction of operator algebras* [M]. Pub by world scientific simgo-port, New Jerseny London, HongKong.


# The Multiplier Algebras of JC-Algebras


LAI Yi-xin

(Dept. of Math., Teachers' College of Qingdao University, 266071, China)



**Abstract**: In this paper, we characterize the multiplier algebras of JC-algebras by double centralizers, and study the relationship between multiplier algebra $M(A)$ of complex $C^*$-algebra $A$ and $C^*$-algebra $C^*(M(A_{sa}))$ generated by the multiplier algebra of JC-algebra $A_{sa}$, the self-adjoint part of $A$, Finally, we study the extension of JB-algebras.



**Key words**: double centralizers; JC-algebra.