第 20 卷第 4 期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 4
2000年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2000

广义集值拟变分不等式*

何中全
(四川师范学院数学系，南充 637002)

摘　要：本文研究了一类广义集值拟变分不等式，得到了这类广义集值拟变分不等式解存在的一个充分条件，并给出了近似解的迭代算法.

关键词：集值映射；广义拟变分不等式；迭代算法.
分类号：AMS(1991) 47H/CLC O177.91
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)04-0580-03

1 引言

设 X 是 Hilbort 空间，$\|\cdot\|$、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 X 上的范数与内积. 设 $\mathrm{P}_{f(c)}(X)$ 表示 X 中非空闭凸子集的全体. 集值映射 T、S：$X\to \mathrm{P}_{f(c)}(X)$. 单值映射 g、m：$X\to X$. 设 $K\in \mathrm{P}_{f(c)}(X)$，$K(u)\stackrel{\triangle}{=}m(u)+K$，$\forall\, u\in X$. 广义集值拟变分不等式问题即为

(GSQVIP)：求 $u\in X$，$x\in T(u)$，$y\in S(u)$，使得 $g(u)\in T(u)$，且下面不等式成立

$$\langle x,v-g(u)\rangle \geqslant \langle y,v-g(u)\rangle,\forall\, v\in K(u). \tag{1}$$

迭代算法(A)：设 $\rho>0$，任取 $u_0\in X$，$x_0\in T(u_0)$，$y_0\in S(u_0)$，令

$$u_1=u_0-g(u_0)+m(u_0)+P_k(g(u_0)-\rho(x_0-y_0)-m(u_0)),$$

则存在 $x_1\in T(u_0)$，$y_1\in S(u_0)$，使得

$$\|x_1-x_0\|\leqslant H(T(u_1),T(u_0)),\ \|y_1-y_0\|\leqslant H(S(u_1),S(u_0)).$$

令 $u_2\stackrel{\triangle}{=}u_1-g(u_1)+m(u_1)+P_k(g(u_1)-\rho(x_1-y_1)-m(u_1))$. 将这个工作不断进行下去，可以得到序列 $\{u_n\}$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足下面条件

$$\begin{cases} u_n\stackrel{\triangle}{=}u_{n-1}-g(u_{n-1})+m(u_{n-1})+P_k(g(u_{n-1})-\rho(x_{n-1}-y_{n-1})-m(u_{n-1}));\\ x_n\in T(u_n),\ \|x_n-x_{n-1}\|\leqslant H(T(u_n),T(u_{n-1}));\\ y_n\in S(u_n),\ \|y_n-y_{n-1}\|\leqslant H(S(u_n),S(u_{n-1})),\end{cases} \tag{2}$$

$n=1,2,\cdots$. $H(A,B)$ 表示集合 A,B 的 Hausdorff 度量. P_k 是闭凸集 K 的投影算子.

条件(H)：设 T,S,g,m 如前面定义，且满足

(i) T,S,g,m 都是 Lipschitz 连续的，$\eta,\sigma,\alpha,\lambda$ 分别是 T,S,g,m 的 Lipschitz 常数；

* 收稿日期：1997-04-29
作者简介：何中全(1955-)，男，四川南充市人，硕士，四川师范学院副教授.

(ii) T, g 是强单调的，γ, β 分别是 T, g 的强单调常数.

引理 1 (u,x,y)是广义集值拟变分不等式问题(GSQVIP)的解的充分必要条件是

$$g(u) = m(u) + P_k(g(u) - \rho(x-y) - m(u)). \tag{3}$$

这里 $\rho>0$(常数)，$x\in T(u)$，$y\in S(u)$.

定理 1 如果条件(H)成立，$0<k=2\sqrt{1-2\beta+\alpha^2}+2\lambda<1$，并且下列条件之一成立时

(i) $\sigma>\eta, \gamma>\dfrac{(1-k)^2\eta^2+\sigma^2}{2(1-k)\sigma}$;

(ii) $\sigma=\eta, \gamma>\sigma(1-k)$;

(iii) $\sigma\langle\eta, \gamma\rangle\sigma(1-k)+\sqrt{(\eta^2-\sigma^2)k(2-k)}$,

则存在(u,x,y)满足(GSQVIP).

证明 任取 $u_0\in X, x_0\in T(u_0), y_0\in S(u_0)$. 由迭代算法(A)知，存在序列$\{u_n\},\{x_n\},\{y_n\}$满足(2).

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u_n\| = &\|u_n-u_{n-1}-(g(u_n)-g(u_{n-1}))+(m(u_n)-m(u_{n-1}))+P_k(g(u_n)-\\&\rho(x_n-y_n)-m(u_n))-P_k(g(u_{n-1})-\rho(x_{n-1}-y_{n-1})-m(u_{n-1}))\|\\&\leqslant(2(\sqrt{1-2\beta+\alpha^2}+\lambda)+\sqrt{1-2\rho\gamma+\eta^2\rho^2}+\sigma\rho)\|u_n-u_{n-1}\|.\end{aligned} \tag{4}$$

令 $\theta=2(\sqrt{1-2\beta+\alpha^2}+\lambda)+\sqrt{1-2\rho\gamma+\eta^2\rho^2}+\sigma\rho=k+\sqrt{1-2\rho\gamma+\eta^2\rho^2}+\sigma\rho$. 由(4)式可得

$$\begin{cases}\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant\theta\|u_n-u_{n-1}\|\leqslant\theta^n\|u_1-u_0\|;\\ \|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\eta\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant\eta\theta^n\|u_1-u_0\|;\\ \|y_{n+1}-y_n\|\leqslant\sigma\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant\sigma\theta^n\|u_1-u_0\|.\end{cases} \tag{5}$$

如果条件(i)成立，令 $f(\rho)\overset{\triangle}{=}(\sigma^2-\eta^2)\rho^2+2(\gamma-\sigma+k\sigma)\rho+k(k-2)$，则有 $f(\frac{1-k}{\sigma})>0$，故存在 $0<\rho<\frac{1-k}{\sigma}$，使得 $f(\rho)>0$，从而有 $0<\theta<1$.

如果条件(ii)成立，因 $\gamma>\sigma(1-k)$，故存在 $\rho>0$，使得 $f(\rho)>0$，从而有 $0<\theta<1$.

如果条件(iii)成立，设 ρ_1 是 $f(\rho)$的右零点($\Delta=4((\gamma-\sigma+k\sigma)^2-(\sigma^2-\eta^2)k(k-2))>0$)，则

$$\rho_1=\frac{-2(\gamma-\sigma+k\sigma)+\sqrt{4((\gamma-\sigma+k\sigma)^2-(\sigma^2-\eta^2)k(k-2))}}{2(\sigma^2-\eta^2)}>0,(\sigma<\eta,\gamma>\sigma(1-k)).$$

故存在 $\rho>\rho_1>0$，使得 $f(\rho)>0$，从而有 $0<\theta<1$.

综上所述，当条件(i)，(ii)，(iii)有一个成立时，$\{u_n\},\{x_n\},\{y_n\}$都是 X 中的 Cauchy 列. 故存在 $u,x,y\in X$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$. 因

$$d(x,T(u))\leqslant\|x-x_n\|+d(x_n,T(u))\leqslant\|x-x_n\|+\eta\|u_n-u\|, \tag{6}$$

$$d(y,S(u))\leqslant\|y-y_n\|+d(y_n,S(u))\leqslant\|y-y_n\|+\sigma\|u_n-u\|, \tag{7}$$

故 $d(x,T(u))=0$，$d(y,S(u))=0$. 由 $T(u),S(u)$的闭性知，$x\in T(u)$，$y\in S(u)$，并且

$$g(u)=m(u)+P_k(g(u)-\rho(x-y)-m(u)).$$

故 $g(u)\in K(u)$. 由引理 1 知，(u,x,y)满足(GSQVIP).

定理 2 设定理 1 的条件成立，(u,x,y)是广义集值拟变分不等式问题(GSQVIP)的解，

则由(2)式给出的近似解序列$\{(u_n,x_n,y_n)\mid(u_0=u,x_0=x,y_0=y)\}$强收敛于$(u,x,y)$.

证明 仿定理1的证明有

$$\begin{cases}\|u_{n+1}-u\|\leqslant\theta\|u_n-u\|\leqslant\theta^n\|u_1-u\|,\\ \|x_{n+1}-x\|\leqslant\eta\|u_{n+1}-u\|\leqslant\eta\theta^n\|u_1-u\|,\\ \|y_{n+1}-y\|\leqslant\sigma\|u_{n+1}-u\|\leqslant\sigma\theta^n\|u_1-u\|,\end{cases}\tag{8}$$

其中θ如定理1的证明所取. 因$0<\theta<1$,故

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{n+1}-u\|=0,\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x\|=0,\lim_{n\to\infty}\|y_{n+1}-y\|=0.$$

参考文献:

[1] NOOR M A. *On the nonliear complementarity problem* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1987, **123**: 455—460.

[2] SIDDIQI A H and ANSARI Q H. *Strongly nonlinear quasivariational inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1990, **149**: 444—450.

[3] ZENG L C. *Iterative algorithms for finding approximate solutions for general strongly nonliear variational inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **187**: 352—360.

[4] HASSOUNI A and MOUDAFI A. *A perturbed algorithm for variational inclusions* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **185**: 706—712.

Generalized Set-Value Quasi-Variational Inequalities

HE Zhong-quan

(Dept. of Math., Sichuan Teacher's College, Nanchong 637002, China)

Abstract: In this paper, we study a type generalized set-value quasi-variational inequalities and get a sufficient condition on extension of the inequalities solutions and present on iterated algorithm for approximation solutions of the inequalities.

Key words: set-value-mapping; generalized quasi-variational inequality; iterated algorithm.