第20卷第4期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 4
2000年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2000

$H_p(0<p<1)$ 函数族的旋转角及导数模的偏差估计*

王化崇[1]， 高传信[2]
(1. 西安市武警工程学院，710086； 2. 山东荷泽教育学院)

摘 要：本文对满足 $|z|<1$ 有 $f(z)\neq 0$ 的 $f'(z)\in H_p(0<p<1)$ 函数族的旋转角及导数模作出偏差估计.

关键词：H_p 函数族；旋转角；导数模.
分类号：AMS(1991) 30C/CLC O174.51
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)04-0601-04

1 引言及引理

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 单位园内解析，且

$$H_p(r,f)=\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}},\quad 0<p<1,$$

$$H_\infty(r,f)=\sup_{0\leqslant\theta<2\pi}|f(re^{i\theta})|.$$

若 $H_p(f)=\lim\limits_{r\to 1}H_p(r,f)<\infty$，则称满足该式且在单位园内解析函数 $f(z)$ 的全体的集合为 H_p 函数族.

Фридтан 证明了：当 $0<p<1$ 时

$$|a_n|\leqslant(n+1)^{\frac{1}{p}}H_p(f)\quad(n=0,1,2\cdots). \tag{1}$$

1985 年，胡克将其结果改进为：设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in H_p$，当 $0<p\leqslant 1$ 时，有

$$|a_n|\leqslant(n+1)^{\frac{1}{p}-1}H_p(f)\{1-[|a_0|^{\frac{\delta}{2\delta-1}}H_p^{\frac{\delta p}{2\delta-1}}(f)^{-\frac{1}{n+1}}]^2\}^{\frac{1}{4}k(\delta)}, \tag{2}$$

此处 $\delta=2^mp$ 及 $k(\delta)=\begin{cases}2-\frac{1}{\delta}, 当\frac{1}{2}<\delta\leqslant\frac{2}{3}时,\\ \frac{1}{\delta}-1, 当\frac{2}{3}\delta<\delta\leqslant 1 时.\end{cases}$

本文给出，当 $0<p<1$ 时，$f'(z)\neq 0(|z|<1)$ 的 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in H_p$ 函数族的旋转角及导数模的偏差估计.

---

* 收稿日期：1997-08-29；修订日期：1999-06-17
作者简介：王化崇(1941-)，男，山东人，副教授.

对 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in H_p$，不妨设 $f(0)=0,f'(0)=1$，将其标准化有

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in H_p,f'(z)\neq 0(|z|<1).$$

引理 1 若 $f(z)$ 在单位园 $|z|<1$ 内解析且无零点，设 z_0 为单位园内任意一点，则

$$\log f(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t+\log f(z_0) \tag{3}$$

为多值函数 $\mathrm{Log}(z)$ 的一个单值解析分支，特别当 $z_0,f(0)=1$ 时，有

$$\log=\int_{0}^{z}\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

引理 2 设 $f(\zeta)\in H_p,0<p<1$，且 $\zeta=\varphi(z)$ 在单位园 $|z|<1$ 内解析，又假设 $|\varphi(z)|<1$，则 $g(z)=f[\varphi(z)]\in H_p$.

2 定理及其证明

定理 1 若 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in H_p$，且当 $|z|<1$ 时，假设 $f'(z)\neq 0$，又设 $0<p<1$，则

$$\frac{(1-r)^{3^{\frac{1}{p}}H_p(f)-1}}{(1+r)^{3^{\frac{1}{p}}H_p(f)+1}}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{(1+r)^{3^{\frac{1}{p}}H_p(f)-1}}{(1-r)^{3^{\frac{1}{p}}H_p(f)+1}}, \tag{6}$$

$$|\arg f'(z)|\leqslant 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)\log\frac{1+r}{1-r},\quad |z|=r<1. \tag{7}$$

证明 因当 $|z|<1$ 时，分式线性变换 $\varphi(\zeta)=\dfrac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}$ 在单位园 $|\zeta|<1$ 内解析，且将单位园 $|\zeta|<1$ 映成自身，故有 $|\varphi(\zeta)|<1$.

又因 $f(\zeta)\in H_p.\ 0<p<1$，由引理 2 得

$$f(\varphi(\zeta))=f(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta})\in H_p.$$

又因 H_p 函数族空间是线性空间，及当 $|z|<1$ 时，$f'(z)\neq 0$，做函数

$$g(\zeta)=\frac{f(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta})-f(z)}{f'(z)(1-z\bar{z})},$$

在 $|\zeta|<1$ 内的函数是解析的，将 z 视为常数，又 $f[\varphi(\zeta)]\in H_p$，由 H_p 函数族定义，显然 $g(\zeta)\in H_p,(0<p<1)$，将 $g(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 内展成幂级数

$$g(\zeta)=\zeta+\beta_2\zeta^2+\cdots.$$

由 Toglor 级数系数公式得：

$$\beta_2=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{1}{2}[\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2-2\bar{z})]. \tag{8}$$

在 (1) 式中令 $n=2$ 有 $|a_2|\leqslant 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)$. 于是对于 $g(\zeta)\in H_p$，当 $0<p<1$ 时，有 $|\beta_2|\leqslant 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)$. 因此

$$|[\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2-2\bar{z})]|\leqslant 2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f).$$

又 $|Z\frac{1}{2}[\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2)-2\bar{z}z]|\leqslant 2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)|z|$，注意到 $|z|=r, 0\leqslant r<1$，于是以 $1-r^2$ 除这个不等式两端得

$$|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}|\leqslant 2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)\frac{r}{1-r^2}. \tag{9}$$

由此可推得

$$-2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)\frac{r}{1-r^2}\leqslant R_e\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\}\leqslant 2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)\frac{r}{1-r^2},$$

即

$$\frac{2r^2-2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)r}{1-r^2}\leqslant R_e\{|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\}\leqslant\frac{2r^2+2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)r}{1-r^2}. \tag{10}$$

在 $|z|<1$ 中，因 $f'(z)\neq 0, f'(0)=1$，由引理 1，(4) 式规定 $\log f'(z)=\int_0^z\frac{f''(z)}{f'(z)}dt$ 为 $\mathrm{Log}f'(z)$ 的单值解析分支，比较实部和虚部有：

$$\begin{cases}\log|f'(z)|=R_e\{\int_0^z\frac{f''(t)}{f'(t)}dt\},\\ \arg f'(z)=I_m\{\int_0^z\frac{f''(t)}{f'(t)}dt\}.\end{cases} \tag{11}$$

从此可得

$$\begin{cases}r\frac{\partial}{\partial r}\{\log|f'(re^{i\theta})|\}=R_e\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\},\\ r\frac{\partial}{\partial r}\{\arg|f'(re^{i\theta})|\}=I_m\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\}.\end{cases} \tag{12}$$

从(10)及(12)的第一式即可得出

$$\frac{2r-2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)}{1-r^2}\leqslant\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})|\leqslant\frac{2r+2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)}{1-r^2}.$$

从(9)式得

$$-2\cdot 3^{\frac{r}{p}}H_p(f)\frac{1}{1-r^2}\leqslant I_m\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\}\leqslant 2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)\frac{r}{1-r^2}.$$

又由(12)第二式得

$$-2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)\frac{1}{1-r^2}\leqslant\frac{\partial}{\partial r}\{\arg|f'(re^{i\theta})|\}\leqslant 2\cdot 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)\frac{1}{1-r^2}.$$

固定 θ，用 ρ 代替 r，从 0 至 r 对 ρ 积分得：

$$\frac{(1-r)^{3^{\frac{1}{p}}H_p(f)-1}}{(1+r)^{3^{\frac{1}{p}}H_p(f)+1}}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{(1+r)^{3^{\frac{1}{p}}H_p(f)-1}}{(1-r)^{3^{\frac{1}{p}}H_p(f)+1}},$$

$$|\arg f'(z)|\leqslant 3^{\frac{1}{p}}H_p(f)\log\frac{1+r}{1-r},$$

其中 $|z|=r<1$. 证完.

利用(2)式，可对定理 1 的表达式进行改进，令 $n=2$，当 $0<p\leqslant 1$ 时，由(2)式可得：

$$|a_2| \leqslant 3^{\frac{1}{p}-1} H_p(f) \{1 - [|a_0|^{\frac{\delta}{2\delta-1}} H_p^{\frac{\delta p}{2\delta-1}}(f)^{-\frac{1}{3}}]^2\}^{\frac{1}{4}k(\delta)}.$$

记 $\theta(p, a_0, \delta) = 3^{\frac{1}{p}-1} H_p(f) \{[|a_0|^{\frac{\delta}{2\delta-1}} H_p^{\frac{\delta p}{2\delta-1}}(f)^{-\frac{1}{3}}]^2\}^{\frac{1}{4}k(\delta)}$,则有

定理 2 若 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in H_p$,且当 $|z| < 1$ 时,$f'(z) \neq 0$,又假定 $0 < p \leqslant 1$,则

$$\frac{(1-r)^{\theta(p,a_0,\delta)-1}}{(1+r)^{\theta(p,a_0,\delta)+1}} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{(1+r)^{\theta(p,a_0,\delta)-1}}{(1-r)^{\theta(p,a_0,\delta)+1}}, \tag{13}$$

$$|\arg f'(z)| \leqslant \theta(p, a_0, \delta) \log \frac{1+r}{1-r}, \tag{14}$$

其中 $|z| = r < 1$.

参考文献:

[1] 胡 克. H_p 函数的一些性质 [J]. 数学进展, 1985, 14(1):

[2] 莫 叶. 复变函数论 [M]. 山东科技出版社, 1983.

[3] DUREN. *Theory of H_p Spaces* [M]. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1970.

The Deviation Assessment of the Rotation Angie and the Derivative Modules for the Function Class

WANG Hua-chong[1], GAO Chuan-xin[2]

(1. Technical College of Armed Police, China; 2. Heze College of Education, China)

Abstract: This paper covers the deviation assessment of rotation angle and derivative modulus for function caass $f(z) \in H_p (0 < p < 1)$ with $|z| < 1$ and $f'(z) \neq 0$.