第20卷第4期
2000年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 20 No. 4
Nov. 2000

B-值随机变量序列加权和的收敛结果*

陈平炎[1]，　甘师信[2]

(1. 武汉大学数学系，430072；2. 中山大学数学系，广州 510275)

摘　要：本文讨论了双向无穷 B-值随机变量序列加权和的弱大数定律、L^r 收敛性、完全收敛性. 并由此刻画了空间的几何性质.

关键词：弱大数定律；完全收敛性；稳定 p 型空间.

分类号：AMS(1991) 60F05/CLC O211.4

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2000)04-0613-06

1　引　言

设 $(B,\|\cdot\|)$ 为实可分 Banach 空间，取值于 B 的 Borel 可测函数称为 B-值随机变量.

定义 1　称实数阵列 $\{a_{ni},n\geqslant 1,-\infty<i<\infty\}$ 属于 S^β 类，若满足

$$\Gamma=\max\Big(\sup_{n\geq 1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_{ni}|^\beta,\ \sup_{-\infty<i<\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{ni}|^\beta\Big)<\infty.$$

若 $\beta=1$，则简记 S^β 为 S. 令 $b_{ni}=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}$，容易看出对任意 $r\geqslant\beta$ 有

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|^r\leqslant n\Gamma^{r/\beta}. \tag{1}$$

$\{X_i,-\infty<i<\infty\}$ 为 B-值随机变量序列，若 $0<\beta\leqslant 1$，$\sup_{-\infty<i<\infty}E\|X_i\|^\beta<\infty$，则对 S^β 中任一元素 $\{a_{ni},n\geqslant 1,-\infty<i<\infty\}$，$Y_n=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}X_i$ 是有意义的，此时 $\sum_{j=1}^{n}Y_j=\sum_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i$. 很明显，当 $i=n$ 时，$a_{ni}=1$，当 $i\neq n$ 时，$a_{ni}=0$，过程 $Y=\{Y_n=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ni}X_i,n\geqslant 1\}$ 是随机变量序列 $\{X_n,n\geqslant 1\}$；当 a_{ni} 只与 $n+i$ 有关时，过程 Y 为滑动平均过程(见[1]).

定义 2　称 B-值随机变量序列 $\{X_i,-\infty<i<\infty\}$ 为正随机变量 X 弱控制，如果存在正常数 C，使得

$$\sup_{-\infty<i<\infty}P(\|X_i\|\geqslant x)\leqslant CP(X\geqslant x),\quad\forall\, x>0.$$

本文第二部分讨论了过程 Y 部分和的弱大数定律及 L^r 收敛性，第三部分讨论了它的收敛

* 收稿日期：1997-10-29；修订日期：1999-12-23
基金项目：中国博士后科学基金资助项目
作者简介：陈平炎(1968-)，男，博士

速度.文中出现的 Banach 空间的几何性质及相互关系可见[2].约定 C 表示正常数,它在不同的地方可取不同的值.

2 弱大数定律及 L^r 收敛性

定理1 设 $1 < p < 2$,则下列条件等价

(Ⅰ) B 是稳定 p 型空间.

(Ⅱ) 对任一零均值独立同布的 B-值随机变量序列 $\{X_i, -\infty < i < \infty\}$ 及对 S 中所有元素 $\{a_{ni}, n \geqslant 1, -\infty < i < \infty\}$, $n^{-1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{ni}X_i \xrightarrow{p} 0$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to\infty} x^p P(\|X_1\| \geqslant x) = 0.$$

证明 (Ⅰ)⇒(Ⅱ).先证充分性.对任意 $\epsilon > 0$,有

$$\begin{aligned}P\Big(n^{-1/p}\Big\|\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{ni}X_i\Big\| \geqslant \epsilon\Big) &\leqslant P\Big(n^{-1/p}\Big\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|\geqslant n^{1/p})} - Eb_{ni}X_iI_{(\|X_i\|\geqslant n^{1/p})}\big)\Big\| \geqslant \epsilon/2\Big)\\ &\quad + P\Big(n^{-1/p}\Big\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|< n^{1/p})} - Eb_{ni}X_iI_{(\|X_i\|< n^{1/p})}\big)\Big\| \geqslant \epsilon/2\Big)\\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

由 Chebyshev 不等式及(1)式,有

$$I_1 \leqslant Cn^{-1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|E\|X_1\|I_{(\|X_1\|\geqslant n^{1/p})} \leqslant Cn^{1-1/p}E\|X_1\|I_{(\|X_1\|\geqslant n^{1/p})}.$$

由条件 $\lim_{x\to\infty} x^p P(\|X_1\| \geqslant x) = 0$ 知 $I_1 \to 0 (n\to\infty)$.

注意到存在 $p < p_1 \leqslant 2$, B 是 p_1 型空间,因此由 p_1 型空间的性质及(1)式,有

$$I_2 \leqslant Cn^{-p_1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|^{p_1}E\|X_1\|^{p_1}I_{(\|X_i\|<n^{1/p})} \leqslant Cn^{1-p_1/p}E\|X_1\|^{p_1}I_{(\|X_i\|<n^{1/p})}.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可知 $I_2 \to 0 (n\to\infty)$.取 $a_{nn} = 1, a_{ni} = 0 (n \neq i)$,则由文[3]中定理 9.22 可知必要性及(Ⅱ)⇒(Ⅰ)成立.

注 定理1是对文[3]中定理 9.22 的部分推广;定理1中的限制条件 $p > 1$ 是必要的,是为了保证 $Y_n (n \geqslant 1)$ 有意义.

对 B-值鞅差序列,有如下结论.

定理2 设 $1 < p < p_1 \leqslant 2$, B 为 p_1 可光滑空间, $\{X_i, \mathscr{F}_i, -\infty < i < \infty\}$ 是 B-值鞅差序列, $\{a_{ni}, n \geqslant 1, -\infty < i < \infty\}$ 为 S 中任一元素.

(Ⅰ) 若 $\lim_{x\to\infty} x^p \sup_{-\infty<i<\infty} P(\|X_i\| \geqslant x) = 0$,则 $n^{-1/p}\sum_{-\infty<i<\infty} b_{ni}X_i \xrightarrow{p} 0$;

(Ⅱ) 若 $\lim_{x\to\infty} x^p \sup_{-\infty<i<\infty} P(\|X_i\| \geqslant x) = 0$,且 $\sup_{-\infty<i<\infty} E\|X_i\|^p < \infty$,则对任意 $0 < r < p$,有 $n^{-1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{ni}X_i \xrightarrow{L^r} 0$;

(Ⅲ) 若 $\{\|X_i\|^p, -\infty < i < \infty\}$ 一致可积,则 $n^{-1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{ni}X_i \xrightarrow{L^p} 0$.

证明 (Ⅰ)对任意 $\epsilon > 0$,有

$$P\Big(n^{-1/p}\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\|\geqslant\varepsilon\Big)$$
$$\leqslant P\Big(n^{-1/p}\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|\geqslant n^{1/p})}-E(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|\geqslant n^{1/p})}|\mathscr{F}_{i-1})\big)\|\geqslant\varepsilon/2\Big)+$$
$$P\Big(n^{-1/p}\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|<n^{1/p})}-E(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|<n^{1/p})}|\mathscr{F}_{i-1})\big)\|\geqslant\varepsilon/2\Big)$$
$$=I_3+I_4.$$

由 Chebyshev 不等式及(1)式，有

$$I_3\leqslant Cn\sup_{-\infty<i<\infty}P(\|X_i\|\geqslant n^{1/p})+Cn^{1-1/p}\int_{n^{1/p}}^{\infty}P(\|X_i\|\geqslant x)\mathrm{d}x,$$

由条件 $\lim\limits_{x\to\infty}x^p\sup\limits_{-\infty<i<\infty}P(\|X_i\|\geqslant x)=0$ 知 $I_3\to0(n\to\infty)$.

由 p_1 可光滑空间的性质及(1)，有

$$I_4\leqslant Cn^{-p_1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|E\|X_i\|^{p_1}I_{(\|X_i\|<n^{1/p})}\leqslant\int_0^1x^{p_1-1}n\sup_{-\infty<i<\infty}P(\|X_i\|\geqslant xn^{1/p})\mathrm{d}x.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可知 $I_4\to0(n\to\infty)$.

(Ⅱ) 由于 p_1 可光滑空间是 p 可光滑空间，利用 p 可光滑空间的性质及(1)式，有

$$E\Big(n^{-r/p}\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\|^r\Big)^{p/r}\leqslant Cn^{-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|^pE\|X_i\|^p\leqslant\sup_{-\infty<i<\infty}E\|X_i\|^p<\infty,$$

因此 $\{n^{-r/p}\|\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\|^r,n\geqslant1\}$ 一致可积，结合(Ⅰ)知 $n^{-1/p}\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\xrightarrow{L^r}0$.

(Ⅲ) 由 Jensen 不等式及 p_1 可光滑空间的性质，对任意 $a>0$，有

$$n^{-1}E\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\|^p\leqslant Cn^{-1}E\Big(\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|<a)}-E\big(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|<a)}|\mathscr{F}_{i-1}\big)\big)\|^{p_1}\Big)^{p/p_1}+$$
$$Cn^{-1}E\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\big(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|\geqslant a)}-E\big(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|\geqslant a)}|\mathscr{F}_{i-1}\big)\big)\|^p$$
$$\leqslant Cn^{p/p_1-1}a^p+C\sup_{-\infty<i<\infty}E\|X_i\|^pI_{(\|X_i\|\geqslant a)}.$$

先令 $n\to\infty$，再令 $a\to\infty$，即有 $n^{-1/p}\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\xrightarrow{L^p}0$.

当 $0<p<1$ 时，有如下结论，其证明与定理 2 类似，故略去.

定理 3 设 $0<\beta<p<1$，$\{X_i,-\infty<i<\infty\}$ 为任一 B-值随机变量序列.

(Ⅰ) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}x^p\sup\limits_{-\infty<i<\infty}P(\|X_i\|\geqslant x)=0$，则任给 $\{a_{ni},n\geqslant1,-\infty<i<\infty\}$ 属于 S^β，有 $n^{-1/p}\sum\limits_{-\infty<i<\infty}b_{ni}X_i\xrightarrow{p}0$；

(Ⅱ) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}x^p\sup\limits_{-\infty<i<\infty}P(\|X_i\|\geqslant x)=0$，且 $\sup\limits_{-\infty<i<\infty}E\|X_i\|^p<\infty$，则任给 $\{a_{ni},n\geqslant1,-\infty<i<\infty\}$ 属于 S^β，对任意 $0<r<p$，有 $n^{-1/p}\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\xrightarrow{L^r}0$；

(Ⅲ) 若 $\{\|X_i\|^p,-\infty<i<\infty\}$ 一致可积，则任给 $\{a_{ni},n\geqslant1,-\infty<i<\infty\}$ 属于 S^p，有 $n^{-1/p}\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\xrightarrow{L^p}0$.

4 收敛速度

自从许宝禄和 Robbins(见[4])于 1947 年引人完全收敛性的概念以来,对于独立和的完全收敛性已取得了一系列完美的结果. 1992 年,李得立等人得到了滑动平均过程的完全收敛的结果. 下面的定理 4 包含了李得立等人的结果,并利用加权和的完全收敛性刻画了 Banach 空间的几何性质. 下面出现的慢变化函数的概念及其性质可参见文[5].

定理 4 设 $1 \leqslant p < 2, r \geqslant 1, rp > 1$,则下述条件相互等价

(Ⅰ) B 是稳定 p 型空间.

(Ⅱ) 对所有慢变化函数 $l(x)$,对任一独立同分布的 B-值随机变量序列 $\{X_i, -\infty < i < \infty\}$,及 S 中所有元素 $\{a_{ni}, n \geqslant 1, -\infty < i < \infty\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-p} l(n) P\left(\left\|\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{ni} X_i\right\| \geqslant \varepsilon n^{1/p}\right) < \infty$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 成立的充分必要条件为 $E\|X_1\|^{rp} l(\|X_1\|^p) < \infty$ 及 $EX_1 = 0$.

证明 先证充分性,假定 $E\|X_1\|^{rp} l(\|X_1\|^p) < \infty$ 及 $EX_1 = 0$. 对任意 $\varepsilon > 0$,有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-p} l(n) P\left(\left\|\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{ni} X_i\right\| \geqslant \varepsilon n^{1/p}\right) \\
\geqslant &\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-p} l(n) P\left(\left\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(b_{ni} X_i I_{(\|X_i\| \geqslant n^{1/p})} - E b_{ni} X_i I_{(\|X_i\| \geqslant n^{1/p})}\right)\right\| \geqslant \varepsilon n^{1/p}/2\right) + \\
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-p} l(n) P\left(\left\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(b_{ni} X_i I_{(\|X_i\| < n^{1/p})} - E b_{ni} X_i I_{(\|X_i\| < n^{1/p})}\right)\right\| \geqslant \varepsilon n^{1/p}/2\right) \\
= &I_7 + I_8.
\end{aligned}
$$

由 Chebyshev 不等式、(1)式及慢变化函数的性质有

$$
\begin{aligned}
I_7 &\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} l(n) n^{-1/p} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |b_{ni}| E\|X_i\| I_{(\|X_i\| \geqslant n^{1/p})} \\
&\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-1/p} l(n) E\|X_1\| I_{(\|X_1\| \geqslant n^{1/p})} \\
&\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-1/p} l(n) \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/p} P(k \leqslant \|X_1\|^p < k+1) \\
&\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} k^{r} l(k) P(k \leqslant \|X_1\|^p < k+1) \\
&\leqslant CE\|X_1\|^{rp} l(\|X_1\|^p) < \infty.
\end{aligned}
$$

注意到存在 $p < p_1 \leqslant 2$, B 是 p_1 型空间. 从而当 $rp < p_1$ 时,有

$$
\begin{aligned}
I_8 &\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} l(n) n^{-p_1/p} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |b_{ni}|^{p_1} E\|X_i\|^{p_1} I_{(\|X_i\| < n^{1/p})} \\
&\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-p_1/p} l(n) E\|X_1\|^{p_1} I_{(\|X_1\| < n^{1/p})} \\
&\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-p_1/p} l(n) \sum_{k=n}^{\infty} k^{p_1/p} P(k-1 \leqslant \|X_1\|^p < k) \\
&\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} k^{r} l(k) P(k-1 \leqslant \|X_1\|^p < k)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant CE\|X_1\|^{rp}l(\|X_1\|^p)<\infty. \tag{2}$$

若 $rp\geqslant p_1$，取 $t>\max\left(\frac{pp_1(r-1)}{p_1-p},rp\right)$ 由文[6]中推论 2.4 知

$$I_8\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}l(n)\left(n^{-p_1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|^{p_1}E\|X_i\|^{p_1}I_{(\|X_i\|<n^{1/p})}\right)^{t/p_1}$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}l(n)n^{-t/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|^tE\|X_i\|^tI_{(\|X_i\|<n^{1/p})}$$

$$=I_9+I_{10}.$$

此时

$$I_9\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}l(n)\left(n^{1-p_1/p}E\|X_1\|^{p_1}\right)^{t/p_1}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2+t/p_1-t/p}l(n)<\infty.$$

类似(2)可证 $I_{10}\leqslant CE\|X_1\|^{rp}l(\|X_1\|^p)<\infty$．总之，$I_8<\infty$，这就证明了充分性.

取 $a_{nn}=1,a_{ni}=0(n\neq i)$，类似文[5]中定理的证明可知 $E\|X_1\|^{rp}l(\|X_1\|^p)<\infty$ 及 $EX_1=0$；再取 $l(x)=1$，由文[2]中的结论可证(Ⅱ)⇒(Ⅰ).

由上面的证明过程来看，可将定理 4 改为下形式，而且后面的定理都有相应类似的形式.

定理 4′ 设 $1\leqslant p<2,r\geqslant1,rp>1$，则下述条件相互等价

(Ⅰ) B 是稳定 p 型空间.

(Ⅱ) 对所有慢变化函数 $l(x)$，对任一独立同分布的 B-值随机变量序列 $\{X_i,-\infty<i<\infty\}$，对所有满足条件 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}|c_{ni}|^r\leqslant Cn^{1-r/p}$ 的常数阵列 $\{c_{ni},n\geqslant1,-\infty<i<\infty\}$，$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-p}l(n)P\left(\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}c_{ni}X_i\|\geqslant\varepsilon\right)<\infty$ 对每个 $\varepsilon>0$ 成立的充分必要条件为 $E\|X_1\|^{rp}l(\|X_1\|^p)<\infty$ 及 $EX_1=0$.

对 B-值鞅差序列，有如下结论.

定理 5 设 $1\leqslant p<2,r\geqslant1,1<rp<p_1\leqslant2$，$B$ 是 p_1 可光滑空间，$\{X_i,\mathscr{F}_i,-\infty<i<\infty\}$ 是 B-值鞅差序列，且为 X 弱控制，$\{a_{ni},n\geqslant1,-\infty<i<\infty\}$ 为 S 中任元素，$l(x)$ 为任一慢变化函数. 若 $EX^{rp}l(X^p)<\infty$，则对每个 $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-p}l(n)P\left(\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\|\geqslant\varepsilon n^{1/p}\right)<\infty.$$

证明 对意 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-p}l(n)P\left(\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\|\geqslant\varepsilon n^{1/p}\right)$$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-p}l(n)P\left(\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|\geqslant n^{1/p})}-E(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|\geqslant n^{1/p})}|\mathscr{F}_{i-1})\right)\|\geqslant\varepsilon n^{1/p}/2\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-p}l(n)P\left(\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|<n^{1/p})}-E(b_{ni}X_iI_{(\|X_i\|<n^{1/p})}|\mathscr{F}_{i-1})\right)\|\geqslant\varepsilon n^{1/p}/2\right)$$

$$=I_{11}+I_{12}.$$

由 Chebyshev 不等式及(1)式，有

$$I_{11}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}l(n)n^{-1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|E\|X_i\|I_{(\|X_i\|\geqslant n^{1/p})}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-1/p}l(n)E\|X_1\|I_{(\|X_1\|\geqslant n^{1/p})}$$

类似 $I_7 < \infty$ 的证明可证 $I_{11} \leqslant CEX^{rp}l(X^p) < \infty$. 利用 p_1 光滑空间的性质及(1)式，有

$$I_{12} \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}l(n)n^{-p_1/p}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|b_{ni}|^{p_1}E\|X_i\|^{p_1}I_{(\|X_i\|<n^{1/p})}$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-p_1/p}l(n)E\|X_1\|^{p_1}I_{(\|X_1\|<n^{1/p})}$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-p_1/p}l(n)\sum_{k=n}^{\infty}k^{p_1/p}P(k-1\leqslant\|X_1\|^p<k.)$$

类似(2)式的证明可证 $I_{11} \leqslant CEX^{rp}l(X^p) < \infty$. 这就证明了定理 5.

下面的定理的证明方法与定理 5 相类，故略去其证明.

定理 6 设 $0<p<1, r\geqslant 1, 0<\beta<rp<1, \{X_i, -\infty<i<\infty\}$ 是任一 B-值随机变量序列，且为 X 弱控制，$\{a_{ni}, n\geqslant 1, -\infty<i<\infty\}$ 为 S^β 中任一元素，$l(x)$ 为任一慢变化函数. 若 $EX^{rp}l(X^p)<\infty$，则对每个 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-p}l(n)P\Big(\|\sum_{i=-\infty}^{\infty}b_{ni}X_i\|\geqslant\varepsilon n^{1/p}\Big)<\infty$$

参考文献：

[1] LI Deli, BHASKARA M and WANG Xiang-chen. *Complete convergence of moving average of moving average process* [J]. Statistics & Probability Letters, 1992, **14**: 111—114.

[2] WOYCZYNSKI W A. *Geometry and martingale in Banach spaces Part* I, *Advancws in Probab. Rel. Topics*, *Vol.* 4, *Probab. on Banach space* [J]. Marcel Dekker, New York, 1978, 265—517.

[3] LEDOUX M and TALAGRANG M. *Probability in Banach Spaces* [M]. Spring-Verlag Berlin Hedeberg, New York, 1991.

[4] HSU P L and ROBBIN H. *Complete convergence and the law of large numbers* [J]. Proc. Nat. Sci. U. S. A., 1947, **33**: 25—37.

[5] 白志东、苏淳. 关于独立和的完全收敛性 [J]. 中国科学 A 辑, 1985, **15**: 399—411.

[6] 邵启满. 一类矩不等式及其应用 [J]. 数学学报, 1988, **31**: 736—743.

Some Limit Results for Weighted Sum of B-Valued Random Variables

CHEN Ping-yan[1], GAN Shi-xin[2]

(1. Dept. of Math., Wuhan Univ., 430072, China; 2. Dept. of Math., Zhongshan Univ., Guangzhou 510275, China)

Abstract: In this paper, we establish the weak law of large number (WLLN), L^r convergence, complete convergence of weighted sums of doubly infinite sequcence of B-valued random variables, connecting with geometry property of Banach space.

Key words: WLLN; complete convergence; Banach space of stable type p.