Journal of Mathematical Research & Exposition
Vol.21, No.1, 44-46, February, 2001

Existence and Uniqueness of Solutions of Two-Point Boundary Value Problem for Fourth-Order Nonlinear Differential Equation *

YU Hai-lan[1], *PEI Ming-he*[2]

(1. Dept. of Basic Course, Northeast China Inst. of Elec. Power Eng., Jinlin 132012, China;
2. Dept. of Math., Normal College of Beihua University, Jilin 132013, China)

Abstract: By using the Leray-Schauder degree theory we give the concrete sufficient conditions of the existence and uniqueness of solutions of a class two point boundary value problems for fourth-order nonlinear differential equation.

Key words: boundary value problem; existence; uniqueness.

Classification: AMS(1991) 34B15/CLC O175.14

Document code: A **Article ID:** 1000-341X(2001)01-0044-03

In this paper, we consider nonlinear problem, as

$$y^{(4)} = f(x, y, y', y'') + e(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

with following boundary conditions

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y'''(0) - hy''(0) = 0, \quad y'''(1) + ky''(1) = 0, \tag{2}$$

where $h, k \geq 0$ and $h + k > 0$, $f : [0,1] \times R^3 \to R$ is a function satisfying Caratheodory's conditions and $e(x) \in L^1[0,1]$.

Theorem 1 *Let $f : [0,1] \times R^3 \to R$ satisfy Caratheodory's conditions. Suppose that there exists a real valued function $c(x)$ in $L^1[0,1]$ such that*

$$f(x, u, v, w)w \geq c(x)|w|,$$

for a.e. x in $[0,1]$, and all u, v, w in R. Then, for every given $e(x)$ in $L^1[0,1]$, the BVP(1)(2) has a solution.

Proof Let y be a solution of the family of equations

$$y^{(4)} = \lambda f(x, y, y', y'') + \lambda e(x), \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

*Received date: 1998-05-12
Biography: YU Hai-lan (1963-), female, the Koreans, M.Sc.

$$y(0) = y(1) = 0, y'''(0) - hy''(0) = 0, y'''(1) + ky''(1) = 0, \tag{4}$$

for some λ in $[0,1]$. Then, it is clear that there is a constant ρ independent of $\lambda \in [0,1]$, such that

$$||y||_{C^3[0,1]} = ||y||_\infty + ||y'||_\infty + ||y''||_\infty + ||y'''||_\infty < \rho. \tag{5}$$

Let $y'' = u$, then BVP(3)(4) is turned to its equivalent boundary value problem

$$u''(x) = \lambda f(x, \int_0^1 G(x,t)u(t)\mathrm{d}t, \int_0^1 G'_x(x,t)u(t)\mathrm{d}t, u(x)) + \lambda e(x), \tag{6}$$

$$u'(0) - hu(0) = 0, \quad u'(1) + ku(1) = 0, \tag{7}$$

here $G(x,t)$ is the Green's function for $y'' = 0, y(0) = y(1) = 0$.

Now we define a linear mapping $L : D(L) \subset C^1[0,1] \to L^1[0,1]$, by setting

$$D(L) = \{u \in W^{2,1}(0,1) : u'(0) - hu(0) = 0, u'(1) + ku(1) = 0\}$$

and for $u \in D(L)$, $Lu = u''$. Then the linear mapping L is a one-to-one mapping. We also define a nonlinear mapping $N : C^1[0,1] \to L^1[0,1]$ by setting

$$(Nu)(x) = f(x, \int_0^1 G(x,t)u(t)\mathrm{d}t, \int_0^1 G'_x(x,t)u(t)\mathrm{d}t, u(x)) + e(x).$$

Note that N is a bounded, continuous mapping from $C^1[0,1]$ into $L^1[0,1]$. Also the linear mapping $K : L^1[0,1] \to C^1[0,1]$, defined, for $u(x) \in L^1[0,1]$ by

$$(Ku)(x) = \int_0^1 H(x,t)u(t)\mathrm{d}t,$$

where $H(x,t)$ is the Green's function for $u'' = 0, u'(0) - hu(0) = 0, u'(1) + ku(1) = 0$. It follows easily from the Arzela-Ascoli theorem that $KN : C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ is a compact mapping.

We next note that $u \in C^1[0,1]$ is a solution of the BVP(6)(7) if and only if u is a solution of the operator equation $[I - \lambda KN]u = 0$, where $I : C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ be the identity mapping. Let $B_\rho = \{u \in C^1[0,1] : ||u||_{C^1[0,1]} < \rho + 1\}$. Then from (5) we know that λKN has no fixed point on ∂B_ρ. Thus by the homotopy invariance of the Leray-Schauder degree, we have that

$$\begin{aligned} \deg(I - KN, B_\rho, 0) &= \deg(I - \lambda KN, B_\rho, 0) \\ &= \deg(I, B_\rho, 0) = 1. \end{aligned}$$

Consequently, KN has a fixed point in B_ρ, which is also a solution of BVP(6)(7). But $u = y''$ and $y = \int_0^1 G(x,s)u(s)ds$ implies that BVP(1)(2) has a solution.

Theorem 2 *Let $f : [0,1] \times R^3 \to R$ satisfy Caratheodory's conditions and assume that for a.e. x in $[0,1]$ and all $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ in R*

$$[f(x, u_1, v_1, w_1) - f(x, u_2, v_2, w_2)](w_1 - w_2) \geq 0.$$

Then, for every given $e(x)$ in $L^1[0,1]$, the BVP(1)(2) has a unique solution.

References:

[1] AFTABIZADEH A R. *Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems* [J]. Math. Anal. Appl., 1986, **116**: 415–426.

[2] GUPTA C P. *Eixstence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation* [J]. Appl. Anal., 1988, **26**: 289–304.

[3] GUPTA C P and LAKSHMIKANTHAM V. *Existence and uniqueness theorems for a third-order three-point boundary value problem* [J]. Nonlinear Analysis, 1991, **16**: 949–957.

四阶非线性微分方程两点边值问题解的存在性与唯一性

禹 海 兰[1], 裴 明 鹤[2]

(1. 东北电力学院基础部, 吉林 132012; 2. 北华大学师范学院数学系, 吉林 132013)

摘 要: 本文利用 Leray-Schauder 理论, 给出了一类四阶非线性微分方程的两点边值问题存在解与存在唯一解的具体的充分条件.

(上接第43页)

甘肃工业大学学报
甘肃工业大学学报：英文版
高等学校计算数学学报
高等学校计算数学学报：英文版
高校应用数学学报：A辑
高校应用数学学报：B辑，英文版
工程数学学报
固体力学学报：英文版
广西大学学报：自然科学版
贵州师范大学学报：自然科学版
哈尔滨工程大学学报
哈尔滨工业大学学报
哈尔滨师范大学自然科学学报
河北师范大学学报：自然科学版
黑龙江大学自然科学学报
湖南大学学报：自然科学版
湖南教育学院学报：自然科学版
湖南师范大学自然科学学报
华东师范大学学报：自然科学版
华南师范大学学报：自然科学版
华侨大学学报：自然科学版
华中理工大学学报
华中师范大学学报：自然科学版
怀化师专学报
黄冈师范学院学报
吉林大学自然科学学报

青岛海洋大学学报：自然科学版
清华大学学报：英文版
清华大学学报：自然科学版
曲阜师范大学学报：自然科学版
陕西师范大学学报：自然科学版
山东大学学报：自然科学版
山东科技大学学报：自然科学版
上海大学学报：英文版
上海大学学报：自然科学版
上海交通大学学报
上海铁道大学学报：自然科学版
深圳大学学报：理工版
生物数学学报（鞍山）
数学的实践与认识
数学季刊（河南大学）
数值计算与计算机应用
数学进展（北京大学）
数学理论与应用（继承湖南数学年刊）
数学年刊：A辑
数学年刊：B辑，英文版
数学物理学报
数学物理学报：英文版
数学学报
数学学报：新辑，英文版
数学研究（厦门）
数学研究与评论（大连理工大学）

徐州师范大学学报：自然科学版
烟台大学学报：自然科学与工程版
烟台师范大学学报：自然科学版
扬州大学学报：自然科学版
益阳师专学报
应用泛函分析学报（北京）
应用概率统计（华东师范大学）
应用力学学报（西安交通大学）
应用数学（华中理工大学）
应用数学和力学（重庆）
应用数学和力学：英文版（上海）
应用数学学报
应用数学学报：英文版
运筹学学报（上海）
漳州师范学院学报：自然科学版
浙江大学学报：理学版
浙江大学学报：自然科学版
郑州大学学报：自然科学版
郑州工业大学学报
中国科学：A辑，英文版
中国科学：E辑，英文版
中国科学技术大学学报
中山大学学报：自然科学版
自动化学报
自然科学进展：英文版
自然科学史研究（北京）

资料来源：MR 网上数据库, 2001-01-10

朱 诚（1936- ），男，编审，（0411）4709876，zhucheng@dlut.edu.cn，www.dlut.lib.edu.cn