第21卷第1期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 1
2001年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2001

图和色多项式根2的阶*

臧运华
(宁波大学管理学系，浙江 宁波 315211)

摘 要：本文证明了3-连通非偶图的色多项式根2的阶为1；满足一定条件的非3-连通非偶图的色多项式根2的阶是图的非偶块和非偶可分块数. 从而，把色多项式$P(G)$中1的阶是图G的非平凡块数这一结果进一步加以推广.

关键词：色多项式；块；可分块；非偶可分块.
分类号：AMS(1991) 05C15/CLC O157.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)01-0148-05

1 引 言

本文考虑有限、无向、无环的简单图，所使用的术语或符号如不特别说明均参照[1]. 引用文献[2]的概念. 若图G含有一个完全子图K_n，$n=0$或1，使$G-K_n$不连通，则称G是可分的. 不含割点的连通图称为块. 若图G不是可分图，存在两点$u,v\in V(G)$，使$G-u-v$不连通，称G为2—可分图；若u,v不相邻，称u,v为2-分割点对；若u,v相邻，则称uv边为分离边. 一个可分块Q是G的不是2-可分图的最大子图. 若2-分割点对u、v在Q中，称可分块Q与u、v关联.

非偶块为不是偶图的块；非偶可分块为不是偶图的可分块.

设$P(G;\lambda)$或$P(G)$表示图G的色多项式，在[3]中有如下结果：

$P(G)$中1的阶是图G的非平凡块数.

本文给出$P(G)$中2的阶相应的结果及其证明.

2 定理及其证明

令$\omega=\lambda-2$，$T(G)$为$P(G;\omega)$中ω的系数.

引理1 G为完全图$K_n(n\geqslant3)$或为轮图$W_n(n\geqslant4)$或为圈C_n($n\geqslant3$的奇数)，则

$$T(G)=(-1)^{n-1}b,\quad b>0.$$

证明 若$G=K_n$，$n=3$时，$G=K_3$. 则$T(K_n)=(-1)^{3-1}2$.

* 收稿日期：1998-04-28；修订日期：1999-12-28
作者简介：臧运华(1965-)，女，吉林省延边市人，硕士，副教授.

$$P(K_n;\lambda)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)$$
$$=(\lambda-2+2)(\lambda-2+1)(\lambda-2)(\lambda-2-1)\cdots(\lambda-2-n+3)$$
$$T(G)=2\cdot1\cdot(-1)\cdots(-n+3)=(-1)^{n-1}b,\quad b>0,b=2(n-3)!.$$

若 $G=W_n$，$n=4$ 时，$G=K_4$，则 $T(G)=(-1)^{n-1}b,b>0$. 假设对 $n\leqslant k-1$ 时结论成立. 当 $n=k$ 时，设 e 为轮边，则 $P(W_n)=P(W_k-e)-P(W_k{}^*e)=P(W_k-e)-P(W_{k-1})$.

而$(\lambda-2)^2|P(W_k-e)$，故 $T(W_k-e)=0$. 由归纳假设，$T(W_{k-1})=(-1)^{k-2}b,b>0$. 则
$$T(W_k)=(-1)^{k-1}b,b>0.$$

若 $G=C_n$，n 为大于等于 3 的奇数，由[5]知
$$P(C_n)=(-1)^n(\lambda-1)+(\lambda-1)^n=(-1)^n(\lambda-2+1)+(\lambda-2+1)^n$$
$$=(-1)^n(\lambda-2)+(-1)^n+(\lambda-2)^n+n(\lambda-2)^{n-1}+\cdots+n(\lambda-2)+1,$$
$$T(G)=n+(-1)^n=(-1)^{n-1}[n+(-1)^n]=(-1)^{n-1}b\quad b=n+(-1)^n>0.$$

以下设图 G 不为圈.

引理 2 H 为图 G 的可分块，u,v 为 G 的 2-分割点对，H 为非偶图，则 $H+uv$ 为 3-连通非偶图. H^*uv 为非偶图；若 H 为偶图，则 $H+uv$，H^*uv 其中之一为非偶图.

证明 若 H 为非偶图，显然，$H+uv$ 为非偶图. 若 $H+uv$ 含割点或 2-分割点对，则其必为 H 的割点或 2-分割点对，与 H 为 G 的可分块矛盾. 故 H 为 3-连通非偶图.

H 为非偶图，则 H 含奇圈. 若 u,v 不同时在 C 上，则 H^*uv 必含奇圈为非偶图；若 u,v 同时在 C 上，收缩 u,v 后，圈 C 变成 H^*uv 中的一个奇圈和一个偶圈，则 H^*uv 也为非偶图.

若 H 为偶图，则过 u,v 两点不含奇圈. 设 u,v 两点的路长为 s，则 u,v 两点路长 s 或都为奇数或都为偶数，否则，H 含奇圈，与 H 为偶图矛盾. 若 s 为奇数，则 H^*uv 含奇圈为非偶图；若 s 为偶数，则 $H+uv$ 含奇圈为非偶图.

引理 3 G 为 2-连通非偶图，u,v 为 G 的 2-分割点对，G 可看成 H_1,H_2 两图重叠于两点 u,v 得到的图，若 H_1,H_2 为非偶块，则$(\lambda-2)^2|P(G)$.

证明 由[6]中定理 1 和定理 3 知：
$$P(G)=P(G+uv)+P(G^*uv)=\frac{P(H_1+uv)P(H_2+uv)}{\lambda(\lambda-1)}+\frac{P(H_1{}^*uv)P(H_2{}^*uv)}{\lambda}.$$

由引理 2，$H_1+uv,H_2+uv,H_1{}^*uv$ 和 $H_2{}^*uv$ 都为非偶图. 故$(\lambda-2)^2|P(G)$.

定理 1 图 G 为 n 个顶点的 3-连通非偶图，则 $P(G)$ 中 2 的阶为 1.

证明 只需证明：$T(G)=(-1)^{n-1}b,b>0$.

由[4]中定理 3.11 知 G 为以下三种图.

(1) G 为轮图时，由引理 1，结论成立.

(2) G 为轮图加上一些边时，$v(G)=n$，假设对 $\nu(G)\leqslant n-1$ 的图 G 结论成立. 图 G 中至少有一条轮边 e，使 $G-e$ 含两个非偶子图重叠于一条分离边，否则 G 不为 3-连通图.
$$P(G)=P(G-e)-P(G^*e).$$

由引理 2，$(\lambda-2)^2|P(G-e)$，$T(G)=-T(G^*e)$，$\nu(G^*e)=n-1$，G^*e 仍为轮图加一些边. 由归纳假设，$T(G)=(-1)^nb,b>0$.

(3) 图 G 由轮图 W_n 经过下列操作所得. W_n 中度大于等于 4 的点 x，用相邻两点 x_1 与 x_2 两点代替. $N(x)$中的点分别与 x_1,x_2 两点之一相邻，且 $d(x_1),d(x_2)\geqslant3$，或再加上(2)的操作，

$$P(G)=P(G-x_1x_2)-P(G^*x_1x_2).$$

若 $G-x_1x_2$ 为 2-连通图时，看成两子图 H_1,H_2 重叠于两点所得，则 H_1,H_2 为非偶图，由引理 2 知，$(\lambda-2)^2|P(G-x_1x_2)$. $G^*x_1x_2$ 为轮图或为轮图加上一些边. 由(1)，(2)和归纳假设，$T(G)=(-1)^{n-1}b,b>0$.

若 $G-x_1x_2$ 不为 2-连通图时，则必存在一条轮边 e，使 $G-x_1x_2-e$ 为 2-连通图，否则 G 中任意两点必有 4 条内部不相交的路，由[4]定理 2.5，与 G 为 3-连通图矛盾. 由引理 3，

$$(\lambda-2)^2|P(G-x_1x_2-e),$$

$$P(G-x_1x_2)=P(G-x_1x_2-e)-P[(G-x_1x_2)^*e],$$

$$P(G)=P(G-x_1x_2)-P(G^*x_1x_2),$$

$$P(G)=P(G-x_1x_2-e)-P[(G-x_1x_2)^*e]-P(G^*x_1x_2).$$

设 $T[(G-x_1x_2)^*e]=(-1)^{n-2}b_1,b_1\geqslant 0;T(G^*x_1x_2)=(-1)^{n-2}b_2,b_2>0$，则

$$T(G)=(-1)^{n-1}(b_1+b_2)(b_1+b_2>0).$$

定理 2 G 为连通非偶图，每个 2-分割点对与偶数个非偶可分块关联，且这些非偶可分块收缩 2-分割点后均为 3-连通图，则 $P(G)$ 中 2 的阶为 G 的非偶块和非偶可分块数.

证明 当 $\nu(G)=3$ 时，G 为非偶图，则 G 为 K_3，结论成立. 假设对 $\nu(G)\leqslant n-1$ 结论成立.

情形 1 G 为非偶图，有分离边时，$P(G)=\dfrac{P(H_1)(H_2)}{\lambda(\lambda-1)}$. H_1,H_2 中至少有一个含有 2-分割点对，且与偶数个非偶可分块关联. 由归纳假设，结论成立.

情形 2 G 为非偶图，无分离边，有割点时，则 $P(G)=\dfrac{P(H_1)(H_2)}{\lambda}$.

由归纳假设结论成立.

情形 3 若 G 无分离边无割点，则 G 为 2-连通不含分离边的图.

一方面，设 G 含 k 个非偶可分块，下面证明 $(\lambda-2)^k|P(G)$，$(\lambda-2)^{k+1}\nmid P(G)$.

设 u,v 为 G 的 2—个分割点对，$G-u-v$ 不连通，图 G 可看成是 G 的两个非偶子图 H_1，H_2 重叠于两点 u,v 所得，则有

$$P(G)=P(G+uv)+P(G^*uv)=\frac{P(H_1+uv)P(H_2+uv)}{\lambda(\lambda-1)}+\frac{P(H_1{}^*uv)P(H_2{}^*uv)}{\lambda}.$$

当 $k=2$ 时，设 G 有 2 个非偶可分块 G_1,G_2 重叠于两点 $u,v,\nu(G_i)=n_i,i=1,2$，

$$P(G)=P(G+uv)+P(G^*uv).$$

G_i 为非偶可分块，由引理 2，故 G_i+uv 和 $G_i{}^*uv$ 必为 3—连通图. 再由定理 1，$T(G_i+uv)=(-1)^{n_i-1}b_i,b_i>0$. $T(G_i{}^*uv)=(-1)^{n_i-2}b_i',b_i'>0$. 故 $G+uv$ 中 $(\lambda-2)^2$ 的系数是 $(-1)^{n_1+n_2-2}b_1b_2$，G^*uv 中 $(\lambda-2)^2$ 的系数是 $(-1)^{n_1+n_2-4}b_1'b_2'$，而 $n_1+n_2-2=n$，$P(G)$ 中 $(\lambda-2)^2$ 的系数是 $(-1)^n(b_1b_2+b_1'b_2')$，$b_i>0,b_i'>0,i=1,2$. 故 $k=2$ 时，结论成立.

下面假设，G 含少于 k 个非偶可分块时，结论成立.

设 k 为大于 2 的偶数，则 k 总能分成两个偶数 p 和 q 的和.

设 H_1,H_2 分别含 p 和 q 个非偶可分块，$k=p+q$，且使 p,q 为偶数. 由引理 2 知，H_1+uv，H_2+uv、$H_1{}^*uv$ 和 $H_2{}^*uv$ 都是非偶图. 再由归纳假设 $(\lambda-2)^p|P(H_i+uv)$，$(\lambda-2)^{p+1}\nmid(H_i+uv)$，$(\lambda-2)^p|P(H_i{}^*uv)$，$(\lambda-2)^{p+1}\nmid(H_i{}^*uv)$，$(\lambda-2)^q|P(H_i+uv)$，$(\lambda-2)^{q+1}\nmid(H_i+uv)$，$(\lambda-2)^q|P(H_i{}^*uv)$，$(\lambda-2)^{q+1}\nmid(H_i{}^*uv)$，$i=1,2$. 故

$$(\lambda-2)^k \mid P(G),(\lambda-2)^{k+1} \nmid P(G).$$

另一方面，若$(\lambda-2)^k \mid P(G),(\lambda-2)^{k+1} \nmid P(G)$，下面证明$G$含$k$个非偶可分块.设$G$含有$m$个非偶可分块，$H_1$、$H_2$分别含$p$和$q$个非偶可分块，则$p+q=m$.

设G中非偶可分块分别为$H_{11},H_{12},\cdots,H_{1p}$和$H_{21},H_{22},\cdots,H_{2q}$，它们的顶点数分别为$n_{11}$，$n_{12},\cdots,n_{1p}$和$n_{21},n_{22},\cdots,n_{2q}$. 由引理2，则$G+uv$和$G^*uv$中的非偶可分块必为3-连通图.由定理1，有$T(H_{1i})=(-1)^{n_{1i}-1}b_{1i},b_{1i}>0,i=1,2,\cdots,p.T(H_{2j})=(-1)^{n_{2j}-1}b_{2j},b_{2j}>0,j=1,2,\cdots,q.$ 则$P(G+uv)$中$(\lambda-2)^m$的系数是

$$(-1)^{n_{11}+n_{12}+\cdots+n_{1p}-p+n_{21}+n_{22}+\cdots+n_{2q}-q}b_{11}b_{12}\cdots b_{1p}b_{21}b_{22}\cdots b_{2q} \tag{1}$$

而

$$n_{11}+n_{12}+\cdots+n_{1p}+n_{21}+n_{22}+\cdots+n_{2q}=n+2(p+q-1) \tag{2}$$

故(1)式为$(-1)^{n+p+q-2}b$，其中$b=b_{11}b_{12}\cdots b_{1p}b_{21}b_{22}\cdots b_{2q},b>0$. 同理$P(G^*uv)$中$(\lambda-2)^m$的系数是

$$(-1)^{n_{11}+n_{12}+\cdots+n_{1p}-2p+n_{21}+n_{22}+\cdots+n_{2q}-2q}b_{11}'b_{12}'\cdots b_{1p}'b_{21}'b_{22}'\cdots b_{2q}' \tag{3}$$

由(2)式有$n_{11}+n_{12}+\cdots+n_{1p}-2p+n_{21}+n_{22}+\cdots+n_{2q}-2q=n-2$，故(3)式为$(-1)^{n-2}b'$，其中$b'=b_{11}'b_{12}'\cdots b_{1p}'b_{21}'b_{22}'\cdots b_{2q}',b'>0$. 则$P(G)$中$(\lambda-2)^m$的系数是$Z=(-1)^{n+p+q-2}b+(-1)^{n-2}b'$.

当$p+q$为偶数，即m为偶数时，$Z\neq 0$，则$(\lambda-2)^m \mid P(G),(\lambda-2)^{m+1} \nmid P(G)$. 由已知$(\lambda-2)^k \mid P(G),(\lambda-2)^{k+1} \nmid P(G)$，故$m=k$. 证明结束.

定理3 设G为非偶连通图，G的2-分割点对u,v总和偶可分块H关联，且u,v在H中的路长总为奇数，则$P(G)$中2的阶为G的非偶块和非偶可分块数.

证明 (1) 若G无割点和分离边，含k个非偶可分块.设G只有一个2-分割点对u,v时，下面证明$(\lambda-2)^k \mid P(G),(\lambda-2)^{k+1} \nmid P(G)$.

由于点u,v在H中的路长为奇数，所以$H+uv$为偶可分图.由引理2，则$G+uv$含k个3-连通非偶可分块，G^*uv含$k+1$个非偶可分块，且$(\lambda-2)^k \mid P(G+uv),(\lambda-2)^{k+1} \nmid P(G+uv),(\lambda-2)^{k+1} \mid P(G^*uv)$. 因为$P(G)=P(G+uv)+P(G^*uv)$，故$(\lambda-2)^k \mid P(G),(\lambda-2)^{k+1} \nmid P(G)$.

若G有m个以上分割点对，且每个分割点对总与偶可分块关联.以上证明了$m=2$时，定理成立.

假设G中有小于m个可分块时，结论成立.设G中的m个2—分割点对所连的边分别为$e_1,e_2,\cdots,e_m$.则

$$\begin{aligned}P(G)&=P(G+e_1)+P(G^*e_1)\\&=P(G+e_1+e_2)+P[(G+e_1)^*e_2]+P(G^*e_1)\\&=\cdots\cdots\\&=P(G+e_1+e_2+\cdots e_m)+P[(G+e_1+e_2+\cdots+e_{m-1})^*e_m]+\cdots+\\&\qquad(G^*e_1{}^*e_2\cdots{}^*e_m).\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式第二项以后对应的图均收缩了至少一个分割点对，则必有一偶图变成了非偶图.这些图或含割点或含分离边，再由归纳假设，$(\lambda-2)^{k+1}$必整除第二项以后的每一项.而$G+e_1+e_2$

$+\cdots+e_m$ 可看成是 m 个 3-连通图两两重叠于 $m-1$ 条边. 由定理 1 知 $(\lambda-2)^k|P(G+e_1+e_2+\cdots e_m)$, $(\lambda-2)^{k+1}\nmid P(G+e_1+e_2+\cdots e_m)$. 故 $(\lambda-2)^k|P(G)$, $(\lambda-2)^{k+1}\nmid P(G)$.

(2) 设 $(\lambda-2)^k|P(G)$, $(\lambda-2)^{k+1}\nmid P(G)$, 证明 G 含 k 个非偶可分块.

若 G 含 s 个非偶可分块, 分 G 含一个 2- 分割点对和 m 个分割点对两种情况与(1)类似可证 $(\lambda-2)^s|P(G)$, $(\lambda-2)^{s+1}\nmid P(G)$. 故 $s=k$. 由(1), (2), 当 G 不含割点和分离边时结论成立.

若 G 有割点和分离边时与定理 2 类似用归纳假设可证.

定理 2 和定理 3 对于不连通图仍然成立.

参考文献:

[1] BONDY J A, MUTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. London: Macmillam Press, 1976. 5—45.

[2] CHIA G L. *Some remarks on the chromatic uniqueness of graph* [J]. Ars. Combinatoria, 1988, **26**(A): 65—72.

[3] WHITEHEAD E G Jr, ZHAO L. *Cutpoints and chromatic polynomial* [J]. Journal of Graph Theory, 1984, **8**: 371—377.

[4] BOLLOBAS B. *Extremal Graph Theory* [M]. London: Academic Press, 1978, 10—17.

[5] CHAO C Y, WHITEHEAD E G. *On chromatic equivalence of graphs* [J]. Theory and Applications of Graphs, 1978, **642**(5): 121—131.

[6] READ R C. *An introduction to chromatic polynomial* [J]. J. Combinatorial Theory, 1968, **8**: 52—71.

Graph and the Multiplicity of Root 2 in the Chromatic Polynomial

ZANG Yun-hua

(Department of Management, Ningbo University, 315211, China)

Abstract: In this paper, it was proved that the multiplicity of the root 2 in the chromatic polynomial of 3-connected non—even graph is 1; and it is showed that the multiplicity of the root 2 in the chromatic polynomial of non-3-connected graph with definite conditions is equal to the number of non-even blocks and non-even separable blocks. Therefore, it was spreaded that the multiplicity of the root 1 in the chromatic polynomial of a simple graph G is equal to the numble of nontrivial blocks in G.

Key words: chromatic polynomial; block; separable block; non-even separable block.