第21卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 21 No. 2
2001年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2001

一类图的伴随多项式的根*

马　海　成

（青海民族学院数学系，青海 西宁 810007）

摘　要：设 G 是不含三角形的简单图，本文讨论了 G 的伴随多项式 $h(G,x)$ 的根的分布情况.

关键词：伴随多项式；路树；根分布.

分类号：AMS(1991) 05C15/CLC O157.5

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0252-05

1 引　言

本文仅考虑有限无向的简单图. 设 G 是一个图，$e\in E(G)$，以 $G\backslash e$ 表示从图 G 中删去边 e 后得到的图. 若 P 是 G 的一条路，以 $G\backslash P$ 表示从 G 中删去路 P 以及和 P 上的点邻接的所有边后得到的图. $u\in V(G)$，以 $N(u)$ 表示 G 中和点 u 邻接的所有点. 众所周知，为了研究点着色和色多项式，文[1] 中引进了伴随多项式.

定义 1　设 G 是一个有 n 个顶点的简单图，它的补图 G^c 的色多项式为：$p(G^c,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}a_i(\lambda)_i$，则多项式 $h(G,x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i$ 叫 G 的伴随多项式（或叫 G^c 的 σ— 多项式[2]），其中 $(\lambda)i=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)$.

每个分支都是完全图的 G 的生成子图叫 G 的理想子图，a_i 的组合意义是 G 的具有 i 个分支的理想子图的个数[1]. 伴随多项式带有图的许多信息，利用该多项式对图已作了一些研究[3]. 但涉及该多项式根方面的文献极少. 文[2] 指出：若图 G 的补图 G^c 不含三角形，则 G 的 σ- 多项式的根都是实数，同时也给出了一些 σ- 多项式的根不全是实数的图. 本文对不含三角形的图类作进一步地讨论，主要结果是下面的两个定理：

定理 1　设 G 是不含三角形的图，$u\in V(G)$.

(i) 若图 G 的最大度数 $\triangle(G)\geqslant 2$，则伴随多项式 $h(G,x)$ 的根在区间 $(-4(\triangle-1),0]$ 之中.

(ii) 多项式 $h(G\backslash u,x)$ 的根内插在多项式 $h(G,x)$ 的根之间；若 G 是连通的，则 $h(G,x)$ 的最小根是单重的，且小于 $h(G\backslash u,x)$ 的最小根.

---

* 收稿日期：1998-04-10；修订日期：1999-12-11

基金项目：青海省教委基金资助课题

作者简介：马海成(1965-)，男，青海民族学院副教授.

定理 2 设 G 是有 n 个顶点的不含三角形的图，则

(i) 多项式 $h(G,x)$ 的非零根的重数最多是覆盖 G 的所有顶点的不相交的路数 l，零根的重数最多是 $\frac{1}{2}(n+l)$.

(ii) 多项式 $h(G,x)$ 的不同根的个数至少是 $\frac{1}{2}(|V(P)|+1)$，其中 P 是 G 中最长的一条路.

熟知，若 $\triangle(G)\leqslant 1$，则 $h(G,x)$ 的根是 0 或 -1.

2 引 理

引理 1[1] 设 G 有 k 个分支：$G_1,G_2,\cdots,G_k$，则 $h(G,x)=\prod_{i=1}^{k}h(G_i,x)$.

引理 2 设 G 是有 n 个顶点的不含三角形的图，$u\in V(G)$，$e=(v_1,v_2)\in E(G)$，则

(i)[4] $h(G,x)=xh(G\backslash u,x)+x\sum_{v\in N(u)}h(G\backslash uv,x)$.

(ii)[3] $h(G,x)=h(G\backslash e,x)+xh(G\backslash v_1v_2,x)$.

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(G,x)=\frac{n}{2x}h(G,x)+\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}h(G\backslash v,x)$.

证明 (iii) 多项式 $2\frac{d}{dx}h(G,x)-\frac{n}{x}h(G,x)$ 的 x^{i-1} 项的系数为 $a_i(G)(2i-n)$. 它等于如下的有序对的个数：这个有序对的第一个元素是 G 的一个 i 理想子图，第二个元素是这个理想子图中的一个孤立点. 如果先选择点，这个有序对的个数为 $\sum_{v\in V(G)}a_{i-1}(G\backslash v)$. 故 (iii) 成立. □

引理 3 设 T 是有 n 个顶点的一棵树.

(i)[5] T 的特征多项式为 $\varphi(T,y)=\sum_{r\geqslant 0}(-1)^rC_{2r}y^{n-2r}$，其中 C_{2r} 表示 T 中取 r 条不相邻边的方法数.

(ii)[6] $u\in V(T)$，多项式 $\varphi(T\backslash u,y)$ 的根内插在多项式 $\varphi(T,y)$ 的根之间，$\varphi(T,y)$ 的最大根是单重的，大于 $\varphi(T\backslash u,y)$ 的最大根.

(iii)[6] 若 T 的最大度数 $\triangle(T)\geqslant 2$，则 T 的谱半径 $\rho(T)<2\sqrt{\triangle-1}$.

(iv) T 的伴随多项式 $h(T,x)=(-1)^n(-x)^{\frac{n}{2}}\varphi(T,(-x)^{\frac{1}{2}})$. 若 $\triangle(T)\geqslant 2$，则 $h(T,x)$ 的根都在区间 $(-4(\triangle-1),0]$ 之中.

证明 (iv) 由于 T 的 i 理想子图的个数 $a_i(T)$ 等于在 T 中取 $n-i$ 条不相邻边的方法数 $C_{2(n-i)}$，于是 $h(T,x)=\sum_{i=1}^{n}C_{2(n-i)}x^i=(-1)^n(-x)^{\frac{n}{2}}\varphi(T,(-x)^{\frac{1}{2}})$. 若 $\triangle(T)\geqslant 2$，则 $h(T,x)$ 的根都在区间 $(-4(\triangle-1),0]$ 之中. □

定义 2 设 G 是一个连通图，$u\in V(G)$，定义图 G 关于点 u 的路树 $T(G,u)$ 如下[5]：

$V(T(G,u))=\{G$ 中从 u 开始的路(包括点 u)$\}$，

$E(T(G,u))=\{(P_1,P_2)\mid P_1,P_2$ 是 G 中从 u 开始的路，且一条路是另一条路的极大真子路$\}$.

路树 $T(G,u)$ 确是一棵树. 路 u 在树 $T(G,u)$ 中的相应点仍记为 u, $T(G,u)\backslash u$ 是一个森林，每一个分支带有 u 的一个邻点. 设 v 是 u 在 G 中的一个邻点，则 $T(G,u)\backslash u$ 的包含点 $P=uv$ 的分支恰同构于路树 $T(G\backslash u,v)$. 如果 G 不连通，约定路树 $T(G,u)$ 为点 u 所属的 G 的分支所确定的路树并上 G 的其它分支后得到的图.

引理 4 设 G 是不含三角形的图，$u\in V(G)$，$T=T(G,u)$ 是 G 关于点 u 的路树，则

$$\frac{h(G\backslash u,x)}{h(G,x)}=\frac{h(T\backslash u,x)}{h(T,x)},$$

且 $h(G,x)$ 整除 $h(T,x)$.

证明 当 G 是一棵树时，$T=G$，结论显然. 假定对 G 的所有子图结论成立. 记 $H=G\backslash u$.

$$\frac{h(G,x)}{h(H,x)}=x+x\sum\nolimits_{v\in N(u)}\frac{h(H\backslash v,x)}{h(H,x)}=x+x\sum\nolimits_{v\in N(u)}\frac{h(T(H,v)\backslash v,x)}{h(T(H,v),x)}.$$

由于 $T(H,v)=T(G\backslash u,v)$ 同构于 $T(G,u)\backslash u$ 的一个分支，该分支以路 $P=uv$ 做为其上的一点. 因而

$$\frac{h(T(H,v)\backslash v,x)}{h(T(H,v),x)}=\frac{h(T(G,u)\backslash u,uv,x)}{h(T(G,u)\backslash u,x)},$$

故

$$\frac{h(G,x)}{h(H,x)}=\frac{xh(T(G,u)\backslash u,x)+x\sum_{v\in N(u)}h(T(G,u)\backslash u,uv,x)}{h(T(G,u)\backslash u,x)}=\frac{h(T,x)}{h(T\backslash u,x)}.$$

这就证明了引理的前半部分. 注意到：$T(G\backslash u,v)$ 同构于 $T(G,u)\backslash u$ 的一个分支，于是 $h(T(G\backslash u,v),x)$ 整除 $h(T(G,u)\backslash u,x)$. 由归纳假设 $h(G\backslash u,x)$ 整除 $h(T(G\backslash u,v),x)$. 因此 $h(G\backslash u,x)$ 整除 $h(T\backslash u,x)$，由引理的前半部分得 $h(G,x)$ 整除 $h(T,x)$. □

设 G 是一个图，$u,v\in V(G)$，记 $P_{uv}(G)$ 为 G 中从点 u 到点 v 的所有路的集合. 记 $P_u(G)$ 为 G 中从点 u 出发的所有路的集合. 记 $P(G)$ 为 G 中所有路的集合.

引理 5 设 G 是不含三角形的图，则

$$4[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(G,x)]^2-4h(G,x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}h(G,x)-\frac{2}{x}h(G,x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(G,x)-\frac{n}{x^2}h^2(G,x)$$
$$=\sum\nolimits_{P\in P(G)}(-x)^{|V(P)|-1}h(G\backslash P,x)^2.$$

证明 设 $u,v\in V(G)$，首先证明等式：

(I) $h(G\backslash u,x)h(G\backslash v,x)-h(G,x)h(G\backslash uv,x)=\sum\limits_{P\in P_{uv}(G)}(-x)^{|V(P)|-1}h(G\backslash P,x)^2$.

若 u,v 属于 G 的不同分支或 $e=(u,v)$ 是 G 的割边时，(I) 显然. 于是假定 u,v 之间至少有一条长度大于 2 的路 P，且假定(I) 对边数少于 G 的图成立. 设 $e=(u,w)$ 是路 P 上的一边，记 $H=G\backslash e$，则 $G\backslash u=H\backslash u$，$G\backslash uv=H\backslash uv$. 由于

$$h(H\backslash u,x)h(H\backslash v,x)-h(H,x)h(H\backslash uv,x)=\sum_{P\in P_{uv}(H)}(-x)^{|V(P)|-1}h(H\backslash P,x)^2,\quad(1)$$

(I)与 (1)式左边的差等于

$$h(G\backslash u,x)[h(G\backslash v,x)-h(H\backslash v,x)]-h(G\backslash uv,x)[h(G,x)-h(H,x)]$$
$$=x[h(G\backslash u,x)h(G\backslash uvw,x)-h(G\backslash uv,x)h(G\backslash uw,x)]$$
$$=(-x)\sum_{P\in P_{wv}(G\backslash u)}(-x)^{|V(P)|-1}h(G\backslash u\backslash P,x)^2\quad(2)$$

设 $P \in P_{uv}(G)$，则 $G\backslash P = H\backslash P$，(I) 与 (1) 式右边的差等于 $\sum_P (-x)^{|V(P)|-1} h(G\backslash P, x)^2$，其和是从点 u 到点 v 且通过边 e 的所有路求和. 恰等于 (2)，等式 (I) 成立.

其次，利用引理 2(iii)，对等式 (I) 在 G 的所有顶点 v 上求和，得等式

$$(\mathrm{I})\quad 2h(G\backslash u, x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(G,x) - 2h(G,x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(G\backslash u, x) - \frac{1}{x}h(G,x)h(G\backslash u,x) = \sum_{P\in P_u(G)} (-x)^{|V(P)|-1} h(G\backslash P, x)^2.$$

最后，对 (Ⅰ) 利用引理 2(iii)，得结论. □

3 主要结果的证明

定理 1 的证明 (i) 由 $\triangle(T(G,u)) \leqslant \triangle(G)$，及引理 4 和引理 3(iv) 结论显然.

(ii) 首先验证对于一棵树 T，$h(T\backslash u, x)$ 的根内插在 $h(T,x)$ 的根之间，其中 $u\in V(T)$.

由于 $h(T,x) = (-1)^n(-x)^{\frac{n}{2}}\varphi(T,(-x)^{\frac{1}{2}})$ 及树的特征根关于原点对称知：如果 $\theta\neq 0$ 是树 T 的 s 重特征根，则 $-\theta^2$ 是 $h(T,x)$ 的 s 重根；如果 0 是树 T 的 t 重特征根，则 0 是 $h(T,x)$ 的 $\frac{t+n}{2}$ 重根. 将 $\varphi(T,y)$ 的根和 $\varphi(T\backslash u, y)$ 的根按从大到小且内插的顺序排列. 若最接近 0 的一个非零根是 $\varphi(T,y)$ 的一个根，由内插性知：0 是 $\varphi(T\backslash u, y)$ 的 $t+1$ 重根，因而 0 是 $h(T\backslash u, x)$ 的 $\frac{(t+1)+(n-1)}{2} = \frac{t+n}{2}$ 重根，此时，$h(T\backslash u,x)$ 的根内插在 $h(T,x)$ 的根之间. 若最接近 0 的一个非零根是 $\varphi(T\backslash u, y)$ 的一个根，则 0 是 $\varphi(T\backslash u,y)$ 的 $t-1$ 重根，因而 0 是 $h(T\backslash u,x)$ 的 $\frac{(t-1)+(n-1)}{2} = \frac{t+n}{2} - 1$ 重根. 此时，$h(T\backslash u,x)$ 的根也内插在 $h(T,x)$ 的根之间.

其次，由引理 4 容易得到 $h(G\backslash u, x)$ 的根也内插在 $h(G,x)$ 的根之间.

最后，若 G 连通，路树 $T(G,u)$ 是一棵树，由引理 3(ii) 和引理 4 结论显然. □

定理 2 的证明 (i) 以 $m(\theta, G)$ 表示多项式 $h(G,x)$ 的根 θ 的重数. 设 $m(\theta,G) = m \geqslant 1$，由定理 1(ii) 知 θ 至少是 $h(G\backslash u,x)$ 的 $m-1$ 重根. 于是 θ 至少是引理 5 等式左边的 $2m-2$ 重根. 因而，对任意的路 $P\in P(G)$，θ 至少是 $(-x)^{|V(P)|-1}h(G\backslash P,x)^2$ 的 $2m-2$ 重根（因为 $h(G,x)$ 的根都不大于零）. 这意味着：

若 $\theta\neq 0$，有 $m(\theta,G)-1 \leqslant m(\theta, G\backslash P)$. 由此容易看出非零根 θ 的重数最多是覆盖 G 的所有顶点的不相交的路数 l.

若 $\theta = 0$，有

$$2m(0,G) - 2 \leqslant |V(P)| - 1 + 2m(0, G\backslash P),$$

即

$$m(0,G) \leqslant m(0, G\backslash P) + \frac{|V(P)|+1}{2}.$$

故 0 根的重数最多是 $\frac{1}{2}(n+l)$.

(ii) 以 k 表示 $h(G,x)$ 的不同根的个数. 观察引理 5 中的等式，等式右边的不大于零的根的个数小于等于 $|V(P)| - 1 + 2(n - |V(P)|) = 2n - |V(P)| - 1$，对任意的路 $P\in P(G)$. 而等

式左边的不大于零的根的个数大于等于 $2\sum_{\theta}(m(\theta,G)-1)$，其和是对 $h(G,x)$ 的所有根上求和.

于是 $2\sum_{\theta} m(\theta,G)-2k\leqslant 2n-|V(P)|-1$，即 $k\geqslant\frac{1}{2}(|V(P)|+1)$. □

推论 3 设 G 是有 n 个顶点的不含三角形的图，若 G 有一条 Hamilton 路，则多项式 $h(G,x)$ 至少有 $\frac{1}{2}(n+1)$ 个不同根；$h(G,x)$ 的非零根都是单重的，零根的重数最多是 $\frac{1}{2}(n+1)$.

参考文献：

[1] 刘儒英. 求图的色多项式的一种新方法及其应用 [J]. 科学通报，1987，**32**：1508—1509.
LIU R Y. *A new method to find chromatic polynomial of graph and its applications* [J]. Kexue Tongbao，1987，**32**：1508—1509.

[2] BRENTI F，ROYLE G F and WAGNER D G. *Location of zeros of chromatic and related polynomials of graphs* [J]. Can. J. Math.，1994，**46**(1)：55—80.

[3] LIU R Y. *Adjoint polynomials and chromatically unique graphs* [J]. Discrete Math.，1997，**172**：85—92.

[4] 马海成. 关于色唯一性的一个注记 [J]. 青海师范大学学报，1998，**4**：4—7.
MA H C. *A note on the chromatic uniqueness* [J]. Journal of Qinghai Normal University，1998，**4**：4—7.

[5] GODSIL C D. *Algebraic Combinatorics* [M]. New York：Chapman and Hall，1993.

[6] CVETKOVIC D M，DOOB M，SACHS H. *Spectra of Graphs* [M]. New York：Academic Press，1980.

The Roots of the Adjoint Polynomial of a Class of Graphs

MA Hai-cheng

(Dept. of Math.，Qinghai Nationalities College，Xining 810007，China)

Abstract：Let G be a simple graph that Contains no triangles，in this paper we discuss that the distribution state of the roots of the adjoint polynomial $h(G,x)$ of G.

Key words：path tree；adjoint polynomial；roots distribution.