第21卷第2期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 2
2001年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2001

非欧空间中双基本图形的度量方程及其应用*

杨 世 国
(安徽教育学院数学系，安徽 合肥 230061)

摘 要：本文提出了 n 维球面型空间和双曲空间中双基本图形的概念，建立了球面型空间与双曲空间中双基图形的度量方程，并给出度量方程的一些应用.

关键词：非欧空间；双基本图形；度量方程.
分类号：AMS(1991) 51M16/CLC O186
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)02-0311-06

1 引 言

设 R^m 为 m 维实向量空间，R^{n+1} 中满足条件 $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2$ 的所有点 $x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 构成集合 S，S 中任意两点 x 与 y 之间的距离 $xy \in [0, \pi r]$ 满足下式

$$\cos \frac{xy}{r} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n+1}y_{n+1}}{r^2}, \tag{1}$$

此时 S 为一度量空间，称为 n 维球面型空间，记为 $S_{n,r}$.

R^n 中满足条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$ 的所有点 $x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 构成集合 H，$r > 0$ 为实数，H 中任意两点 x 与 y 之间的距离 xy 由下式规定

$$\mathrm{ch} \frac{xy}{r} = \frac{1 - x_1y_1 - x_2y_2 - \cdots - x_ny_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2}}, \tag{2}$$

此时 H 为一度量空间，称为 n 维双曲空间，记为 $H_{n,r}$.

$S_{n,r}$ 中超平面 u 即指 R^{n+1} 中过原点 O 的 n 维超平面 $u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_{n+1}x_{n+1} = 0$ 与 S 的交，$S_{n,r}$ 中两定向超平面 u 与 v 所成的角 $\angle uv$ 按下式计算

$$\cos \angle uv = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_{n+1}v_{n+1}}{\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_{n+1}^2}\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_{n+1}^2}}. \tag{3}$$

$S_{n-1,1}$ 中点 x 到定向超平面 u 的带号距离 $\overline{xu}$ 规定为

* 收稿日期：1998-01-12；修订日期：1999-12-31
基金项目：安徽省教委科研基金资助项目(99jw0041)
作者简介：杨世国(1952-)，男，安徽教育学院教授.

$$\sin\frac{\overline{xu}}{r}=\frac{u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_{n+1}x_{n+1}}{r\sqrt{u_1^2+\cdots+u_{n+1}^2}}. \tag{4}$$

$H_{n,r}$ 中的超平面 u 即指 R^n 中 $n-1$ 维超平面 $u_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n=0$ 与 H 的交($u_1^2+u_2^2+\cdots u_n^2>u_0^2$),$H_{n,r}$ 两定向超平面 u,v 所成的角 $\angle uv$ 按下式计算

$$\cos\angle uv=\frac{-u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n}{\sqrt{-u_0^2+u_1^2+\cdots u_n^2}\sqrt{-v_0^2+v_1^2+\cdots v_n^2}}. \tag{5}$$

$H_{n,r}$中点 x 到定向超平面 u 的带号距离 $\overline{xu}$由下式确定

$$\mathrm{sh}\frac{\overline{xu}}{r}=\frac{u_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n}{\sqrt{-u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2}\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}. \tag{6}$$

$S_{n,r}$与 $H\,n,r$中的点或定向超平面叫做一个“基本元素”.

定义 1 设 x,y,u,v 是 $S_{n,r}$ 中的基本元素,令 1) $g(x,y)=\cos\frac{xy}{r}$,当 x,y 均为点;2) $g(x,u)=g(u,x)=\sin\frac{\overline{xu}}{r}$,当 x 为点,u 为定向超平面;3) $g(u,v)=\cos\angle uv$,当 u,v 均为定向超平面.

定义 2 设 x,y,u,v 为 $H_{n,r}$ 中基本元素,令 1) $g(x,y)=\mathrm{ch}\frac{xy}{r}$,当 x,y 均为点;2) $g(x,u)=g(u,x)=\sqrt{-1}\mathrm{sh}\frac{\overline{xu}}{r}$,当 x 为点,u 为定向超平面;3) $g(u,v)=\cos\angle uv$,u,v 均为定向超平面.

文献[1—2] 中建立了 $S_{n,r}$ 与 $H_{n,r}$ 中度量方程如下:

定理 1 设 $\varphi_m=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 为 $S_{n,r}$ 中 m 个基本元素构成的基本图形,记 $g_{ij}=g(e_i,e_j)$,$S[\varphi_m]=(g_{ij})_{i,j=1}^m$,当 $m>n+1$ 时,有

$$\det(S[\varphi_m])=0. \tag{7}$$

定理 2 设 $\varphi_m=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 为 $H_{n,r}$ 中 m 个基本元素构成的基本图形,记 $g_{ij}=g(e_i,e_j)$,$H[\varphi_m]=(g_{ij})_{i,j=1}^m$,当 $m>n+1$ 时,有

$$\det(H[\varphi_m])=0. \tag{8}$$

球面型空间与双曲空间中的度量方程(7)、(8)在度量几何中扮演着十分重要的作用(可参见文[1-3]).本文提出了球面型空间与双曲空间中双基本图形之概念,并建立这两种空间中双基本图形之度量方程,推广了 $S_{n,r}$与 $H_{n,r}$中的度量方程.

定义 3 设由 $S_{n,r}(H_{n,r})$ 中 $2m$ 个基本元素构成的集合 $\varphi_{2m}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m;e_1',e_2'\cdots,e_m'\}$,其中对每个 i,e_i 与 e_i' 同时为点,或同时为 $n-1$ 维定向超平面,则称 φ_{2m} 为 $S_{n,r}(H_{n,r})$ 中的双基本图形.

设 $\varphi_{2m}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m;e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$ 为 $S_{n,r}$ 中双基本图形,记 $\varphi_m=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,$\varphi_m'=\{e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$,在 $\varphi_m\times\varphi_m'$ 上定义二元实函数 $g:\varphi_m\times\varphi_m'\to R$($R$ 为实数集),使得

$$g(e_i,e_j')=\begin{cases}\cos\frac{e_ie_j'}{r},e_i,e_j' \text{ 均为点;}\\ \sin\frac{\overline{e_ie_j'}}{r},e_i,e_j' \text{ 中一个为点,另一个为超平面;}\\ \cos\angle e_ie_j',e_i,e_j' \text{ 均为定向超平面.}\end{cases}$$

定理 3 设 $\varphi_{2m}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m;e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$ 为 $S_{n,r}$ 中双基图形，记 $g_{ij}=g(e_i,e'_j)$，$D[\varphi_{2m}]=(g_{ij})_{i,j=1}^{m}$，当 $m>n+1$ 时，有

$$\det(D[\varphi_{2m}])=0. \tag{9}$$

方程(9)称为球面型空间 $S_{n,r}$ 中的双基图形度量方程. 特别，当 $e_i=e'_i(i=1,2,\cdots,m)$ 时，便得 $S_{n,r}$ 中基本图形之度量方程(7).

设 $\varphi_{2m}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m;e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$ 为 $H_{n,r}$ 中双基本图形，记 $\varphi_m=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，$\varphi_m'=\{e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$，在 $\varphi_m\times\varphi_m'$ 上定义二元复函数 $g:\varphi_m\times\varphi_m'\to Z$($Z$ 为复数集)，使得

$$g(e_i,e_j')=\begin{cases}\mathrm{ch}\,\dfrac{e_ie_j'}{r}, & e_i,e_j' \text{ 均为点；}\\[2ex] \sqrt{-1}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\overline{e_ie_j'}}{r}, & e_i,e_j' \text{ 中一个为点，另一个为超平面；}\\[2ex] \cos\angle e_ie_j', & e_i,e_j' \text{ 均为定向超平面.}\end{cases}$$

定理 4 设 $\varphi_{2m}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m;e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$ 为 $H_{n,r}$ 中双基本图形，记 $g_{ij}=g(e_i,e_j')$，$P[\varphi_{2m}]=(g_{ij})_{i,j=1}^{m}$，则当 $m>n+1$ 时，有

$$\det(P[\varphi_{2m}])=0. \tag{10}$$

方程(10)称为 $H_{n,r}$ 中双基本图形之度量方程. 特别，当 $e_i=e_i'(i=1,2,\cdots,m)$ 时，便得 $H_{n,r}$ 中基本图形之度量方程(8).

2　定理的证明

定理 3 的证明　对 $S_{n,r}$ 中双基本图形 $\varphi_{2m}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m;e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$，当 $m\geqslant n+2$ 时，我们不妨设基本图形 $\varphi_m=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 中的所有点都排在每个定向超平面之前，这样并不影响结论，即可设 $\varphi_m=\{x,y,z,\cdots,u,v,w,\cdots\}$，$\varphi_m'=\{x',y',z',\cdots,u',v',w',\cdots\}$，其中 $x,y,z,\cdots(x',y',z',\cdots)$ 为点，$u,v,w,\cdots(u',v',w',\cdots)$ 为定向超平面. 引进记号：$\|x\|=r$，当 x 为点；$\|u\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{n+1}^2}$，当 u 为定向超平面. 令 T 表示下面 $m\times m$ 阶可逆对角阵

$$T=\begin{bmatrix}\|x\| & & & & & & & \\ & \|y\| & & & & 0 & & \\ & & \|z\| & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \|u\| & & & \\ & & & & & \|v\| & & \\ & 0 & & & & & \|w\| & \\ & & & & & & & \ddots\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Q、Q' 表示下面 $m\times m$ 阶矩阵

$$
Q=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}, Q'=\begin{bmatrix} x_1' & x_2' & \cdots & x_{n+1}' & 0 & \cdots & 0 \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n+1}' & 0 & \cdots & 0 \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_{n+1}' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_{n+1}' & 0 & \cdots & 0 \\ v_1' & v_2' & \cdots & v_{n+1}' & 0 & \cdots & 0 \\ w_1' & w_2' & \cdots & w_{n+1}' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.
$$

显然 $\mathrm{rank}(Q) \leqslant n+1, \mathrm{rank}(Q') \leqslant n+1$，且 $T^{-1}QQ'^{\tau}T^{-1}=(g_{ij})_{i,j=1}^{m}=D[\varphi_{2m}]$，所以 $\mathrm{rank}(D[\varphi_{2m}]) \leqslant n+1$，故当 $m>n+1$ 时，有 $\det(D[\varphi_{2m}])=0$.

定理 4 的证明 对 $H_{n,r}$ 中双基本图形 $\varphi_{2m}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m;e_1',e_2',\cdots,e_m'\}$，当 $m \geqslant n+2$ 时，不妨设 $\varphi_m=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 中的所有点都排在每个定向超平面之前，这样并不影响结论，即设 $\varphi_m=\{x,y,z,\cdots,u,v,w,\cdots\}, \varphi_m'=\{x',y',z',\cdots,u',v',w',\cdots\}$，其中 $x,y,z,\cdots(x',y',z',\cdots)$ 为点，$u,v,w,\cdots(u',v',w',\cdots)$ 为定向超平面. 记 $\|x\|=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}$，当 x 为点；$\|u\|=\sqrt{-u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2}$，当 u 为定向超平面. J 为 $m\times m$ 阶可逆对角矩阵：

$$
J=\begin{bmatrix} \|x\| & & & & & & & \\ & \|y\| & & & & 0 & & \\ & & \|z\| & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \|u\| & & & \\ & & & & & \|v\| & & \\ & 0 & & & & & \|w\| & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix},
$$

U 与 U' 分别表示下面 $m\times m$ 阶矩阵：

$$
U=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1}x_1 & \sqrt{-1}x_2 & \cdots & \sqrt{-1}x_n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \sqrt{-1}y_1 & \sqrt{-1}y_2 & \cdots & \sqrt{-1}y_n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \sqrt{-1}z_1 & \sqrt{-1}z_2 & \cdots & \sqrt{-1}z_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{-1}u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{-1}v_0 & v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{-1}w_0 & w_1 & w_2 & \cdots & w_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix},
$$

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1}x_1' & \sqrt{-1}x_2' & \cdots & \sqrt{-1}x_n' & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \sqrt{-1}y_1' & \sqrt{-1}y_2' & \cdots & \sqrt{-1}y_n' & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \sqrt{-1}z'_1 & \sqrt{-1}z'_2 & \cdots & \sqrt{-1}z'_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{-1}u_0' & u_1' & u_2' & \cdots & u_n' & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{-1}v_0' & v_1' & v_2' & \cdots & v_n' & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{-1}w_0' & w_1' & w_2' & \cdots & w_n' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

显然 $\mathrm{rank}(U) \leqslant n+1$，$\mathrm{rank}(U') \leqslant n+1$，且 $J^{-1}UU'^{\tau}J^{-1} = (g_{ij})_{i,j=1}^{m} = P[\varphi_{2m}]$，所以 $\mathrm{rank}(P[\varphi_{2m}]) \leqslant n+1$，故当 $m > n+1$ 时，有 $\det(P[\varphi_{2m}]) = 0$.

3 度量方程的应用

度量方程在度量几何中扮演十分重要作用，下面我们介绍球面型空间与双曲空间中度量方程的一些重要应用. 设 $S_{n,r}$ 中 n 维单形 Ω_n 的顶点集为 $\tau = \{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}$，顶点 A_i 所对的侧面为 f_i，顶点 A_i 到侧面 f_i 之高为 h_i，单形 Ω_n 的诸棱长为 $\overline{A_iA_j} = a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n+1)$，两侧面 f_i 与 f_j 所成内二面角为 $\varphi_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$. $H_{n,r}$ 中 n 维单形 Ω_n 的顶点集为 $\sigma = \{B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}\}$，$\Omega_n$ 的诸棱长为 $\overline{B_iB_j} = b_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n+1)$，记 $A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \cos\frac{a_{ij}}{r} & \\ \cos\frac{a_{ij}}{r} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$，$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \cos\varphi_{ij} & \\ \cos\varphi_{ij} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \mathrm{ch}\frac{b_{ij}}{r} & \\ \mathrm{ch}\frac{b_{ij}}{r} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ · A，Φ，B 均为 $(n+1)\times(n+1)$ 阶实对称矩阵，A_{ij}，Φ_{ij}，B_{ij} 分别表示矩阵 A，Φ，B 的第 i 行第 j 列处元素的代数余子式，A^* 表示 A 的伴随矩阵. A 与 Φ 均为正定的[4、5]，B 的 k 阶顺序主子式有符号 $(-1)^{k-1}(k = 1,2,\cdots,n+1)$[4].

定理 5 （$S_{n,r}$ 中第一余弦定理）$\cos\varphi_{ij} = -\dfrac{A_{ij}}{\sqrt{A_{ii}}\sqrt{A_{jj}}}\ (1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$.

定理 6 （$S_{n,r}$ 中第二余弦定理）$\cos\dfrac{a_{ij}}{r} = -\dfrac{\Phi_{ij}}{\sqrt{\Phi_{ii}}\sqrt{\Phi_{jj}}}\ (1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$.

特别当 $n=2$ 时，定理 5、6 即为球面三角形边之余弦定理和角之余弦定理.

定理 7 设 $S_{n,r}$ 中 n 维单形 Ω_n 的内切球半径为 ρ，则

$$\rho = \frac{1}{r}\arcsin\sqrt{\frac{|A|^{n-1}}{-|\bar{A}|}}, \tag{11}$$

其中

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{A_{11}} & \cdots & \sqrt{A_{n+1,n+1}} \\ \sqrt{A_{11}} & & & \\ \vdots & & A^{*} & \\ \sqrt{A_{n+1,n+1}} & & & \end{bmatrix}.$$

定理 8 设 $H_{n,r}$ 中 n 维单形 σ_n 的内切球半径为 ρ,则

$$\rho=\frac{1}{r}\mathrm{sh}^{-1}\sqrt{\frac{|P|}{|\overline{P}|}},\tag{12}$$

其中

$$P=\begin{bmatrix} |B_{11}| & & (-1)^{n}B_{ij} \\ & |B_{22}| & \\ (-1)^{n}B_{ij} & \ddots & \\ & & |B_{n+1,n+1}| \end{bmatrix},\overline{P}=\begin{bmatrix} 0 & |B_{11}| & \cdots & |B_{n+1,n+1}| \\ |B_{11}| & & & \\ \vdots & & P & \\ |B_{n+1,n+1}| & & & \end{bmatrix}.$$

定理 5～8 的证明只需要用到球面型空间 $S_{n,r}$ 和双曲空间 $H_{n,r}$ 的度量方程(7)、(8)以及文[2]中的引理 1,限于文章的篇幅,这里略去它们的证明.

参考文献:

[1] YANG L, ZHANG J Z. *The concept of rank for abstract distance space* [J]. J. China Univ. Sci. Tech., 1980, **10**(4): 52—65. (in Chinese)

[2] YANG L, ZHANG J Z. *Some metric problems for non-euclidean hyperbolic geometry I, isogonal e-mebedding and metric equation* [J]. J. China. Univ. Sci. Tech. (Issue of Mathematics), 1983, 123—134. (in Chinese)

[3] YANG L, ZHANG J Z. *The metric equation is applied to salles's conjecture* [J]. Acta. Math. Sinca., 1983, **26**(4): 488—493. (in Chinese)

[4] BLUMENTHAL L M. *Theory and Applications of Distance Geometry* [M]. Oxford, 1953.

[5] YANG Shi-guo. *Embedding a simplex with prescribed dihedral angles in spherical space* [J]. J. Math. Res. & Expo., 1996, **16**(4): 557—560. (in Chinese)

The Metric Equations of Bifundamental Figurate in Non-Euclidean Space

YANG Shi-guo

(Dept. of Math., Anhui Institute of Education, Hefei 230061, China)

Abstract: In this paper, the author gave a concept for bifundamental figurates in non-Euclidean space. The metric equations for bifundamental figurates in spherical space and hyperbolic space are established. As spacial case, we get the metric equations for fundamental figurates in spherical space and hyperbolic space. Besides, we gave some applications of the metric equations for fundamental figurates in spherical space and hyperbolic space.

Key words: non-Euclidean space; bifundamental figurate; metric equation.