第 21 卷第 3 期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 3
2001 年 8 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2001

一类反应扩散方程组最大吸引子的正则性和维数估计*

吴建华
(陕西师范大学数学系，陕西 西安 710062)

摘　要：反应扩散方程组的最大吸引子通常是在不变区域内研究，如果不具有不变区域，或者去掉不变区域的限制而在全空间考虑这类问题，其结果如何？本文将证明一类反应扩散方程组在全空间最大吸引子的存在性，并对该吸引子的正则性进行了详细讨论，还给出了该吸引子的维数估计.

关键词：最大吸引子；反应扩散方程组；正则性；维数估计.
分类号：AMS(1991) 35K57，35K55/CLC O175.26
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0387-07

1 引　言

近年来，反应扩散方程的无穷维动力行为的研究已引起了人们的极大兴趣，特别对具有不变区域的反应扩散方程组的最大吸引子的研究，参见[1－3]. 而对不具有不变区域的反应扩散方程组，或者去掉不变区域的限制而在全空间上考虑这类问题，尽管对一些具体的模型得到了一些结果[4,5]，但仍没有出现系统的工作. 本文将讨论如下一类反应扩散方程组在全空间上的最大吸引子的存在性，并详细给出了其正则性和维数估计.

$$
\text{问题 I：}\begin{cases}
u_t - d\Delta u + h(u) + f(x,u,v) = 0, & \\
v_t - D\Delta v + H(v) + F(x,u,v) = 0, & (x,t)\in \Omega\times R^+,\\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x,t)\in \partial\Omega\times R^+,\\
u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), & x\in\Omega,
\end{cases}
$$

其中 Ω 是 R^N 中的有界开集，且具有足够光滑的边界 $\partial\Omega$，(u,v) 是 $\Omega\times R^+\to R^2$ 的向量函数，d，D 是正常数. $h(u)=\sum_{j=1}^{2p-1}a_ju^j\,(p>1)$，$H(v)=\sum_{j=1}^{2q-1}b_jv^j\,(q>1)$，这里 a_j，b_j 是常数且 $a_{2p-1}>0$，$b_{2q-1}>0$. $f(x,u,v)$，$F(x,u,v)$ 关于其各个变量是连续可微的且满足：存在常数 $K_1>0$，$K_2>$

* 收稿日期：1997-08-18；修订日期：1999-09-03
基金项目：国家自然科学基金(10071048，19701021)和教育部高等学校骨干教师资助计划资助项目
作者简介：吴建华(1964-)，男，安徽宿县人，博士，副教授.
E-mail：wjhua@snnu.edu.cn

$0, 0 \leqslant p_1 < 2p-1, 0 \leqslant p_2 < (2p-1)\min\{\frac{q-1}{p-1}, \frac{q}{p}\}, 0 \leqslant q_1 < 2q-1, 0 \leqslant q_2 < (2q-1)\min\{\frac{p-1}{q-1}, \frac{p}{q}\}$,使得

$$|f(x,u,v)| \leqslant K_1(1+|u|^{p_1}+|v|^{p_2}), |F(x,u,v)| \leqslant K_2(1+|u|^{q_2}+|v|^{q_1}). \quad (1)$$

$L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 和 $H^1(\Omega)$ 表示通常意义下的函数空间. $L^p(\Omega)$ 的范数记为 $|\cdot|_p$, $L^2(\Omega)$ 的范数简记为 $|\cdot|$, $H^1(\Omega)$ 的半范和范数分别记为 $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$. 记 $H = L^2(\Omega)^2$, $V = H^1(\Omega)^2$,则在上述条件下,由[7]可得

引理 1 设 $(u_0, v_0) \in H$,则问题 I 在 H 中存在唯一解 $(u(t), v(t))$,且满足

$$(u,v) \in C(R^+, H) \cap L^2(0,T;V) \cap (L^{2p}(Q_T) \times L^{2q}(Q_T)), \forall T > 0.$$

进而得映射 $S(t): (u_0, v_0) \to (u(t), v(t))$ 在 H 上连续,其中 $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

2 最大吸引子的存在性和正则性

定理 1 在上述条件之下,问题 I 所定义的半群 $S(t)$ 在 H 中存在连通、紧的最大吸引子 $\mathscr{A}$.

证明 由 Young 不等式易证:存在常数 $K_3 > 0, K_4 > 0$ 使得

$$\frac{1}{2}a_{2p-1}u^{2p} - K_3 \leqslant h(u)u \leqslant \frac{3}{2}a_{2p-1}u^{2p} + K_3,$$

$$\frac{1}{2}b_{2q-1}v^{2q} - K_4 \leqslant H(v)v \leqslant \frac{3}{2}b_{2q-1}v^{2q} + K_4. \quad (2)$$

问题 I 分别与 u, v 作乘积,在 Ω 上积分且由 Green 公式得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 + d|\nabla u|^2 + \int_\Omega h(u)u\mathrm{d}x = -\int_\Omega uf(x,u,v)\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|^2 + D|\nabla v|^2 + \int_\Omega H(v)v\mathrm{d}x = -\int_\Omega vF(x,u,v)\mathrm{d}x.$$

不妨设 $d \leqslant D$,相加上述两式并由(1)(2)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|^2+|v|^2) + d(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2) + \frac{1}{2}a_{2p-1}\int_\Omega u^{2p}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}b_{2q-1}\int_\Omega v^{2q}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant K_3 + K_4 + K_1\int_\Omega |u|(1+|u|^{p_1}+|v|^{p_2})\mathrm{d}x +$$
$$K_2\int_\Omega |v|(1+|v|^{q_1}+|u|^{q_2})\mathrm{d}x. \quad (3)$$

由 Young 不等式知:存在常数 $K_i(5 \leqslant i \leqslant 8)$,使得

$$\int_\Omega (K_1|u||v|^{p_2} + K_2|v||u|^{q_2}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{1}{6}a_{2p-1}\int_\Omega |u|^{2p}\mathrm{d}x + K_5\int_\Omega |v|^{\frac{2pp_2}{2p-1}}\mathrm{d}x + \frac{1}{6}b_{2q-1}\int_\Omega |v|^{2q}\mathrm{d}x + K_6\int_\Omega |u|^{\frac{2qq_2}{2q-1}}\mathrm{d}x. \quad (4)$$

$$\int_\Omega [(K_1(|u|+|u|^{p_1+1}) + K_6|u|^{\frac{2qq_2}{2q-1}}]\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{6}a_{2p-1}\int_\Omega |u|^{2p}\mathrm{d}x + K_7,$$

$$\int_\Omega [(K_2(|v|+|v|^{q_1+1}) + K_5|v|^{\frac{2pp_2}{2p-1}}]\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{6}b_{2q-1}\int_\Omega |v|^{2q}\mathrm{d}x + K_8.$$

(4)代入(3)并由上述两式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|^2+|v|^2)+2d(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)+\frac{1}{3}a_{2p-1}\int_\Omega u^{2p}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{3}b_{2q-1}\int_\Omega |v|^{2q}\mathrm{d}x\leqslant 2(K_3+K_4+K_7+K_8)\triangleq K_9. \tag{5}$$

再由 Young 不等式得：存在常数 $K_{10}>0,K_{11}>0$，使得 $\frac{1}{6}a_{2p-1}\int_\Omega |u|^{2p}\mathrm{d}x\geqslant |u|^2-K_{10}$，$\frac{1}{6}b_{2q-1}\int_\Omega |v|^{2q}\mathrm{d}x\geqslant |v|^2-K_{11}$. 代入(5)并整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|^2+|v|^2)+2d(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)+(|u|^2+|v|^2)+$$

$$\frac{1}{6}a_{2p-1}\int_\Omega |u|^{2p}\mathrm{d}x+\frac{1}{6}b_{2q-1}\int_\Omega |v|^{2q}\mathrm{d}x\leqslant K_{12}\triangleq K_9+K_{10}+K_{11}. \tag{6}$$

由(6)可得

$$|u|^2+|v|^2\leqslant(|u_0|^2+|v_0|^2)e^{-t}+K_{12}(1-e^{-t}). \tag{7}$$

故对 H 中的任意有界集 $\mathscr{B}$，不妨设 $\mathscr{B}\subset B_H(0,R)$，存在 $T_0=\ln\frac{R^2}{\rho_0^2-K_{12}}$，$(\rho_0>\sqrt{K_{12}})$，当 $t\geqslant T_0$ 时，有 $S(t)\mathscr{B}\subset B_H(0,\rho_0)$. 从 t 到 $t+r(r>0)$ 积分(6)式得

$$2d\int_t^{t+r}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}t+\frac{1}{6}a_{2p-1}\int_t^{t+r}\int_\Omega |u|^{2p}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{6}b_{2q-1}\int_t^{t+r}\int_\Omega |v|^{2q}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant K_{12}r+|u(t)|^2+|v(t)|^2. \tag{8}$$

问题 I 两边分别乘以 $|u|^{2p-2}u$，$|v|^{2q-2}v$ 并在 Ω 上积分且由 Green 公式得

$$\frac{1}{2p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_{2p}^{2p}+d(2p-1)\int_\Omega |u|^{2p-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}a_{2p-1}\int_\Omega |u|^{4p-2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant K_3\int_\Omega |u|^{2p-2}\mathrm{d}x+K_1\int_\Omega |u|^{2p-1}(1+|u|^{p_1}+|v|^{p_2})\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{2q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|_{2q}^{2q}+D(2q-1)\int_\Omega |v|^{2q-2}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}b_{2q-1}\int_\Omega |v|^{4q-2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant K_4\int_\Omega |v|^{2q-2}\mathrm{d}x+K_2\int_\Omega |v|^{2q-1}(1+|u|^{q_2}+|v|^{q_1})\mathrm{d}x.$$

利用 Holder-Young 不等式整理上述两式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_{2p}^{2p}+|v|_{2q}^{2q})+\frac{p}{2}a_{2p-1}\int_\Omega |u|^{4p-2}\mathrm{d}x+\frac{q}{2}b_{2q-1}\int_\Omega |v|^{4q-2}\mathrm{d}x\leqslant K_{13}. \tag{9}$$

由(8)(9)并利用一致 Gronwall 不等式知：任取 $(u_0,v_0)\in\mathscr{B}$，

$$|u(t)|_{2p}^{2p}+|v(t)|_{2q}^{2q}\leqslant K_{14},\quad t\geqslant T_0+r. \tag{10}$$

问题 I 再与 $-\Delta u$，$-\Delta v$ 作内积整理得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)+d|\Delta u|^2+D|\Delta v|^2$$

$$\leqslant\int_\Omega(|h(u)||\Delta u|+|f(x,u,v)||\Delta u|)\mathrm{d}x+$$

$$\int_\Omega(|H(v)||\Delta v|+|F(x,u,v)||\Delta v|)\mathrm{d}x.$$

进而整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)+d|\Delta u|^2+D|\Delta v|^2$$
$$\leqslant K_{15}\int_\Omega(1+|u|^{2p_1}+|u|^{2q_2}+|u|^{4p-2}+|v|^{2p_2}+|v|^{2q_1}+|v|^{4q-2})\mathrm{d}x$$
$$\leqslant K_{16}\int_\Omega(1+|u|^{4p-2}+|v|^{4q-2})\mathrm{d}x.$$

对上式利用一致 Gronwall 不等式并由(8)(10)得：$|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\leqslant K_{17}, t\geqslant T_0+2r$. 再由(7)及 T_0 的定义可知：$\|u(t)\|_1^2+\|v(t)\|_1^2\leqslant K_{18}, t\geqslant T_0+2r$. 故 $S(t)$在 H 上是一致紧的. 综上并由[6]知：问题 I 所定义的半群 $S(t)$在 H 中存在紧的、连通的最大吸引子 $\mathscr{A}$.

定理 2 由定理 1 所给出的最大吸引子 $\mathscr{A}$ 在 $L^\infty(\Omega)^2$ 中有界.

证明 首先证 $\mathscr{A}$ 在 $L^r(\Omega)^2$ 中的有界性($\forall\ 1\leqslant r<+\infty$). 事实上，取 $\lambda(k)=k(2p-2)+2, \Lambda(k)=k(2q-2)+2, k=0,1,2\cdots$. 只需用数学归纳法证明：$\mathscr{A}$ 在 $L^{\lambda(k)}\times L^{\Lambda(k)}$ 中有界且

$$\sup_{(u_0,v_0)\in\mathscr{A}}\int_t^{t+r}\int_\Omega|u|^{\lambda(k+1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant K,\ \sup_{(u_0,v_0)\in\mathscr{A}}\int_t^{t+r}\int_\Omega|v|^{\Lambda(k+1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant K\ (t\geqslant 0). \tag{11}$$

显然，当 $k=0$ 时，$\lambda(0)=\Lambda(0)=2, \lambda(1)=2p, \Lambda(1)=2q$. 由(7)(8)易知(11)式成立.
现设 $k-1$ 时(11)式成立，往证 k 时(11)式也成立. 问题 I 分别与 $|u|^{\lambda(k)-2}u, |v|^{\Lambda(k)-2}v$ 作内积并由 Green 公式得

$$\frac{1}{\lambda(k)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_{\lambda(k)}^{\lambda(k)}+d(\lambda(k)-1)\int_\Omega|u|^{\lambda(k)-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}a_{2p-1}\int_\Omega|u|^{\lambda(k)+2p-2}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant K_3\int_\Omega|u|^{\lambda(k)-2}\mathrm{d}x+K_1\int_\Omega(1+|u|^{p_1}+|v|^{p_2})|u|^{\lambda(k)-1}\mathrm{d}x, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\Lambda(k)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|_{\Lambda(k)}^{\Lambda(k)}+D(\Lambda(k)-1)\int_\Omega|v|^{\Lambda(k)-2}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}b_{2q-1}\int_\Omega|v|^{\Lambda(k)+2q-2}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant K_4\int_\Omega|v|^{\Lambda(k)-2}\mathrm{d}x+K_2\int_\Omega(1+|v|^{q_1}+|u|^{q_2})|v|^{\Lambda(k)-1}\mathrm{d}x. \tag{13}$$

由 Young 不等式得

$$\int_\Omega|u|^{\lambda(k)-1}|v|^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{6}a_{2p-1}\int_\Omega|u|^{\lambda(k+1)}\mathrm{d}x+K_{19}\int_\Omega|v|^{\frac{\lambda(k+1)p_2}{2p-1}}\mathrm{d}x, \tag{14}$$

$$\int_\Omega|v|^{\Lambda(k)-1}|u|^{q_2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{6}b_{2q-1}\int_\Omega|v|^{\Lambda(k+1)}\mathrm{d}x+K_{20}\int_\Omega|u|^{\frac{\Lambda(k+1)q_2}{2q-1}}\mathrm{d}x. \tag{15}$$

注意到 p_i, q_i 的定义易知

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda(k)+2p-2=\lambda(k+1), & \Lambda(k)+2q-2=\Lambda(k+1),\\ p_1+\lambda(k)-1<\lambda(k+1), & q_1+\Lambda(k)-1<\Lambda(k+1),\end{array}\right\} \tag{16}$$
$$\frac{p_2\lambda(k+1)}{2p-1}<\Lambda(k+1),\ \frac{q_2\Lambda(k+1)}{2q-1}<\lambda(k+1).$$

(12)(13)两式相加并由(14)(15)代入，且由(16)和 Young 不等式整理可得：存在常数 $K_{21}>0$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_{\lambda(k)}^{\lambda(k)}+|v|_{\Lambda(k)}^{\Lambda(k)})+\frac{1}{6}\lambda(k)a_{2p-1}\int_\Omega|u|^{\lambda(k+1)}\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\Lambda(k)b_{2q-1}\int_\Omega|v|^{\Lambda(k+1)}\mathrm{d}x\leqslant K_{21}.$$

利用对 $k-1$ 的归纳假设及一致 Gronwall 不等式得：$|u|_{\lambda(k)}^{\lambda(k)} + |v|_{\Lambda(k)}^{\Lambda(k)} \leqslant K_{22}, t \geqslant r$. 又因为 $S(r)\mathscr{A}=\mathscr{A}$，所以任取 $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \mathscr{A}$，存在 $(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0) \in \mathscr{A}$ 使得 $(\tilde{u},v) = S(r)(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$. 故 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 在 $L^{\lambda(k)} \times L^{\Lambda(k)}$ 中有界. 所以 $\mathscr{A}$ 在 $L^{\lambda(k)} \times L^{\Lambda(k)}$ 中有界. 从 t 到 $t+r$ 积分上式并由 $\mathscr{A}$ 在 $L^{\lambda(k)} \times L^{\Lambda(k)}$ 中的有界性知：(11) 对 k 也成立.

其次证 $\mathscr{A}$ 在 $L^{\infty}(\Omega)^2$ 中的有界性. 取定 $l > \frac{n}{2}$，则由上述结论易知

$$|h(u)+f(x,u,v)+u|_l \leqslant K', |H(v)+F(x,u,v)+v|_l \leqslant K''. \tag{17}$$

记 $-d\Delta+I$, $-D\Delta+I$ 在 Neumann 边界条件下生成的解析半群为 $\sum_1(t)$, $\sum_2(t)$，则由[8]知 $|\sum_i(t)\varphi|_\infty \leqslant C_i m(t)^{-\delta} e^{-t} |\varphi|_l, \forall\ \varphi \in L^l(\Omega)$，其中 $m(t) = \min\{1,t\}$, $\delta = \frac{N}{2l} < 1$, $C_i > 0$ 常数.

任取 $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \mathscr{A}$，由 $\mathscr{A}$ 的定义知：存在 $\bar{t} > 0$, $(u_0,v_0) \in \mathscr{A}$，使得问题 I 的解 $(u(t),v(t))$ 满足 $(u(\bar{t}),v(\bar{t})) = (\tilde{u},\tilde{v})$. 又由常数变易公式得

$$u(t) = \sum\nolimits_1(t)u_0 + \int_0^t \sum\nolimits_1(t-s)[-h(u(s)) - f(u(s),v(s)) + u(s)]\mathrm{d}s,$$

$$v(t) = \sum\nolimits_2(t)v_0 + \int_0^t \sum\nolimits_2(t-s)[-H(v(s)) - F(u(s),v(s)) + v(s)]\mathrm{d}s.$$

则

$$|u(t)|_\infty \leqslant C_1K'\{e^{-t}m(t)^{-\delta} + \int_0^t e^{-(t-s)}m(t-s)^{-\delta}\mathrm{d}s\} \leqslant C_1K'\{m(t)^{-\delta} + 1 + \frac{1}{1-\delta}\},$$

这里 $\delta < 1$. 从而当 $t \geqslant \frac{\bar{t}}{2}$ 时，$|u(t)|_\infty \leqslant C_1K'\{m(\frac{\bar{t}}{2})^{-\delta} + 1 + \frac{1}{1-\delta}\}$. 故 $|\tilde{u}|_\infty$ 有界. 类似地可证 $|\tilde{v}|_\infty$ 的有界性. 再由 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 的任意性知 $\mathscr{A}$ 在 $L^\infty(\Omega)^2$ 中有界.

3　最大吸引子的维数估计

设 $(U(t),V(t))$ 是问题 I 的线性化方程的解

$$\begin{cases} U_t - d\Delta U + (h'_u(u) + f_u(x,u,v))U + f_v(x,u,v)V = 0, \\ V_t - D\Delta V + (H'_v(v) + F'_v(x,u,v))V + F'_u(x,u,v)U = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \\ U(x,0) = \xi, V(x,0) = \eta. \end{cases}$$

由定理 2 的结论可证如下引理 2.

引理 2　$S(t)$ 在 $\mathscr{A}$ 上一致可微，且对任意 $(u_0,v_0) \in \mathscr{A}$, $S'(t)(u_0,v_0) = L(t;u_0,v_0)$，其中 $L(t;u_0,v_0):(\xi,\eta) \to (U(t),V(t))$，这里 $(U,V) \in C([0,+\infty),H) \cap L^2((0,T),V)(T > 0)$ 是上述线性化方程组的解.

定理 3　由定理 1 定义的最大吸引子 $\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数不大于 m, Fractal 维数不大于 $2m$，其中 m 由下面的(18) 式给出.

证明　记 $q_m(t) = \sup\limits_{(u_0,v_0)\in\mathscr{A}} \sup\limits_{|(\xi_i,\eta_i)|\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant m)} \{\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Tr}F'(u,v) \cdot Q\mathrm{d}\tau\}$，其中 Q 是 H 到 $QH = \mathrm{span}\{(U_1,V_1),\cdots,(U_m,V_m)\}$ 的正交投影，$(U_i,V_i) = L(t;u_0,v_0) \cdot (\xi_i,\eta_i)(i = 1,2,\cdots,m)$,

$TrF'(u,v)\cdot(U,V)=(d\Delta U-(h'_u(u)+f'_u(x,u,v))U-f'_v(x,u,v)V, D\Delta V-(H'_v(v)+F'_v(x,u,v))V-F'_u(x,u,v)U)$.

设$(\varphi_1,\psi_1),\cdots,(\varphi_m,\psi_m),\cdots$,是 H 中的正交规范基,且$(\varphi_1,\psi_1),\cdots,(\varphi_m,\psi_m)$ 生成 QH. 故由$(U_i,V_i)\in V(\text{a. e. }\tau\in R^+)$ 得$(\varphi_i,\psi_i)\in V(\text{a. e. }\tau\in R^+, 1\leqslant i\leqslant m)$. 而

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}F'(u,v)\cdot Q=&\sum_{j=1}^{m}(F'(u,v)\cdot(\varphi_j,\psi_j),(\varphi_j,\psi_j))\\&=-d\sum_{j=1}^{m}|\nabla\varphi_j|^2-D\sum_{j=1}^{m}|\nabla\psi_j|^2-\sum_{j=1}^{m}\int_\Omega(h'_u+f'_u)\varphi_j^2\mathrm{d}x-\\&\sum_{j=1}^{m}\int_\Omega(H'_v+F'_v)\psi_j^2\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{m}\int_\Omega(F'_u+f'_v)\varphi_j\psi_j\mathrm{d}x\\&\leqslant-d_0\sum_{j=1}^{m}|\nabla(\varphi_j,\psi_j)|^2+\int_\Omega\alpha_1\sum_{j=1}^{m}\varphi_j^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\alpha_2\sum_{j=1}^{m}\psi_j^2\mathrm{d}x\\&\leqslant-d_0\sum_{j=1}^{m}|\nabla(\varphi_j,\psi_j)|^2+\int_\Omega\alpha_3(x,\tau)\rho(x,\tau)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

其中 $d_0=\min\{d,D\},\rho(x,\tau)=\sum_{j=1}^{m}(\varphi_j^2+\psi_j^2),\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1=(h'_u+f'_u)^-+\frac{1}{2}|F'_u+f'_u|$,

$\alpha_2=(H'_v+F'_v)^-+\frac{1}{2}|F'_u+f'_v|$,这里 $a^-\overset{\Delta}{=}\max\{0,-a\}(a\in R)$. 故

$$\mathrm{Tr}F'(u,v)\cdot Q\leqslant-d_0\sum_{j=1}^{m}|\nabla(\varphi_j,\psi_j)|^2+\alpha\int_\Omega\rho(x,\tau)\mathrm{d}x,$$

其中 $\alpha=\sup\{\alpha_3|x\in\overline{\Omega},(u,v)\in\mathscr{A}\}$. 由推广的 Sobolev-Lieb-Thirring 不等式得

$$\sum_{j=1}^{m}|\nabla(\varphi_j,\psi_j)|^2\geqslant K_0\frac{m^{1+2/N}}{|\Omega|^{2/N}}-\overline{K_0}\frac{m}{|\Omega|^{2/N}},$$

其中 $K_0,\overline{K_0}$ 仅与 N 及 Ω 形状有关,与 $|\Omega|$ 大小无关. 代入得

$$\mathrm{Tr}F'(u,v)\cdot Q\leqslant-\frac{d_0K_0}{|\Omega|^{2/N}}m^{1+2/N}+(\frac{d_0\overline{K_0}}{|\Omega|^{2/N}}+\alpha)m\leqslant-K'_1m^{1+2/N}+K'_2,$$

其中 $K'_1=\frac{1}{2}\frac{d_0\overline{K_0}}{|\Omega|^{2/N}}$, $K'_2=K''_2\frac{d_0\overline{K_0}}{|\Omega|^{2/N}}(\frac{\overline{K_0}}{K_0}+\frac{\alpha|\Omega|^{2/N}}{d_0K_0})^{1+N/2}$. 故当 m 满足

$$m-1<K'_3(\frac{\overline{K_0}}{K_0}+\frac{\alpha|\Omega|^{2/N}}{d_0K_0})^{N/2}\leqslant m\text{ 时}, \tag{18}$$

由[6]第五章定理 3.3 知:$\mathscr{A}$ 的 Hausdorff 维数不大于 m,Fractal 维数不大于 $2m$.

注 由定理 2 知 $\mathscr{A}$ 在 $L^\infty(\Omega)^2$ 中有界. 记 $c_1=\inf\limits_{(u,v)\in\mathscr{A}}(h'_u+f'_u),c_2=\inf\limits_{(u,v)\in\mathscr{A}}(H'_v+F'_v)$, $c_3=\sup\limits_{(u,v)\in\mathscr{A}}|f'_v+F'_u|$. 则由(18)式定义的 m 满足

$$m\leqslant1+K'_3(\frac{\overline{K_0}}{K_0}+\frac{\alpha|\Omega|^{2/N}}{d_0K_0})^{N/2}\leqslant C_0(N)\{1+\frac{|\Omega|}{d_0^{N/2}}[(c_1^-)^{N/2}+(c_2^-)^{N/2}+(c_3)^{N/2}]\}.$$

致谢 作者衷心感谢黄艾香,李开泰教授的热情指导和帮助!

参考文献:

[1] MARION M. *Attractors for reaction diffusion equations: existence and estimate of their dimension* [J]. Appl. Anal., 1987, **25**: 101—147.

[2] HALE J K. *Large diffusivity and asymptotic behavior in parabolic systems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1986, **118**: 455—466.

[3] CARVALHO A N, RUASFILHO J G. *Global attractors for parabolic problems in fractional power spaces* [J]. SIAM J. Math. Anal., 1995, **26**: 415—427.

[4] 吴永辉,王明新. 广义 FHN 模型的整体吸引子和惯性流形 [J]. 应用数学学报, 1996, **19**: 185—195.
WU Yong-hui, WANG Ming-xin. *Global attractor and inertial manifold for the generalized FHN model* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1996, **19**: 185—195.

[5] 吴建华. 具有饱和的 Prey-Predator 模型的长时间行为 [J]. 应用数学学报, 1998, **21**: 224—232.
WU Jian-hua. *Longtime behavior for the prey-predator model with saturation* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1998, **21**: 224—232.

[6] TEMAM R. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* [M]. New York: Springer-Verlag, 1988.

[7] LIONS J L. *Quelques Methodes De Resolution Des Problemes Aux limites Nonlineaires* [M]. Dunod, Paris, 1969.

[8] ROTHE F. *Global Solutions to Reaction Diffusion Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

Existence, Regularity and Dimensional Estimate of the Maximal Attractors for Reaction-Diffusion Systems

WU Jian-hua

(Dept. of Math., Shanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: Maximal attractors for reaction diffusion systems are usually studied in invariant regions. If there are no invariant regions, or considering the problem in the whole space instead of invariant regions, what is the result? The paper proves the existence of the maximal attractors for reaction diffusion systems in the whole space, and gives also the regularity and dimensional estimate for the maximal attractors.

Key words: maximal attractor; reaction diffusion system; regularity; dimensional estimate.