第21卷第3期 2001年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 3 Aug. 2001

欧氏空间中具有共形 Gauss 映照的曲面*

吴 炳 烨
(浙江师范大学，浙江 金华 321004)

摘　要：本文考虑欧氏空间中具有共形 Gauss 映照的曲面. 从 Gauss 映照的观点给出了 Veronese 曲面的一个新特征.

关键词：Gauss 映照；伪脐；Veronese 曲面；Kaehler 角.
分类号：AMS(1991) 53A10,53C42/CLC O186.11
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0438-03

1 引 言

设 M 为等距浸入到 n 维欧氏空间 R^n 中的定向曲面. 记 $g:M\to G_{2,n}$ 为其 Gauss 映照，其中 $G_{2,n}$ 是 R^n 中经过原点的定向 2 维平面所构成的 Grassmann 流形，并且对于任意 $p\in M$，$g(p)$ 即为 M 在 P 点处的切平面平移到原点. 众所周知，$G_{2,n}$ 上存在典则复结构[1]. 若 $g:M\to G_{2,n}$ 是共形的，那么存在 g 相应于 $G_{2,n}$ 复结构的一个不变量 α(称为 g 的 Kaehler 角)，它给出了 g 是否为全纯映照的一个量度(详情请见 §2). 若 α 分别等于 0、π 或 $\pi/2$，则称 g 是全纯、反全纯或全实的. 已经知道 g 是共形的充要条件是 M 是伪脐的[2]. 由[1]知 g 是全纯的当且仅当 M 全脐，而 g 是反全纯的当且仅当 M 极小. 本文第一个结果给出了 g 为全实共形映照的等价条件.

定理 1 R^n 中定向曲面 M 的 Gauss 映照 $g:M\to G_{2,n}$ 为全实共形映照的充要条件是 M 为伪脐平坦曲面.

下面结果从 Gauss 映照的观点给出了 Veronese 曲面的一个新特征.

定理 2 设 $g:M\to G_{2,n}$ 为 R^n 中定向曲面 M 的 Gauss 映照. 若 g 是具有常 Kaehler 角的共形调和映照，并且 g 不是全纯、反全纯及全实的，那么 M 一定落在 R^n 的某一超球面中，并且作为该超球面的 Veronese(极小) 曲面的一部分.

2 定理的证明

设 $P=e_1\wedge e_2$ 为 $G_{2,n}$ 中的定向 2 维平面，其中 e_1,e_2 是与 P 定向一致的标准正交基. 将 e_1，

* 收稿日期：1998-09-07
作者简介：吴炳烨(1965-)，副教授.
E-mail：jhwbye@mail.jhptt.zj.cn

e_2 扩充为与 R^n 定向一致的标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$. R^n 的结构方程是：

$$de_A = \sum_B \theta_{AB} e_B, \quad \theta_{AB} + \theta_{BA} = 0,$$
$$d\theta_{AB} = \sum_C \theta_{AC} \wedge \theta_{CB}, \tag{1}$$

这里及以下我们将采用如下指标约定：

$$1 \leqslant A, B, \cdots \leqslant n; \quad 1 \leqslant i, j, \cdots \leqslant 2; \quad 3 \leqslant \alpha, \beta, \cdots \leqslant n.$$

$G_{2,n}$ 上度量由下式给出：

$$ds^2 = \sum_\alpha (\theta_{1\alpha}{}^2 + \theta_{2\alpha}{}^2). \tag{2}$$

设 $\{E_\alpha, E_{\alpha^*}\}$ 为 $\{\theta_{1\alpha}, \theta_{2\alpha}\}$ 的对偶标架，则 $G_{2,n}$ 上的复结构 J 定义为

$$JE_\alpha = E_{\alpha^*}, JE_{\alpha^*} = - E_\alpha. \tag{3}$$

设 $x: M \to R^n$ 为定向曲面 M 到 R^n 的等距浸入. 在局部讨论中，我们将 $p \in M$ 与 $x(p) \in R^n$ 视为等同. 选取 R^n 上的局部标准正交标架场 $e_1,\cdots,e_n$，使得当限制在 M 上时，e_1, e_2 与 M 相切. 设 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 为 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶标架. 那么，限制在 M 上，有

$$ds_M^2 = \theta_1{}^2 + \theta_2{}^2, \quad \theta_\alpha = 0,$$
$$\theta_{1\alpha} = h_{11}^\alpha \theta_1 + h_{12}^\alpha \theta_2,$$
$$\theta_{2\alpha} = h_{21}^\alpha \theta_1 + h_{22}^\alpha \theta_2, \quad h_{12}^\alpha = h_{21}^\alpha, \tag{4}$$
$$K = \sum_\alpha (h_{11}^\alpha h_{22}^\alpha - (h_{12}^\alpha)^2),$$

其中 h_{ij}^α 和 K 分别是 M 的第二基本形式和 Gauss 曲率. Gauss 映照 $g: M \to G_{2,n}$ 定义为

$$g(p) = (e_1 \wedge e_2)_p, \quad \forall\, p \in M. \tag{5}$$

结合(2)，(4)和(5)得

$$g^*(ds^2) = \sum_\alpha ((h_{11}^\alpha)^2 + (h_{12}^\alpha)^2)\theta_1{}^2 + \sum_\alpha ((h_{12}^\alpha)^2 + (h_{22}^\alpha)^2)\theta_2{}^2 +$$
$$2\sum_\alpha h_{12}^\alpha (h_{11}^\alpha + h_{22}^\alpha)\theta_1\theta_2 \tag{6}$$
$$g_*(e_1) = \sum_\alpha (h_{11}^\alpha E_\alpha + h_{12}^\alpha E_{\alpha^*}), \quad g_*(e_2) = \sum_\alpha (h_{12}^\alpha E_\alpha + h_{22}^\alpha E_{\alpha^*}).$$

从 $(4)_1$ 和 $(6)_1$ 易知 g 是共形的充要条件是

$$\sum_\alpha h_{12}^\alpha (h_{11}^\alpha + h_{22}^\alpha) = 0, \quad \sum_\alpha (h_{11}^\alpha)^2 = \sum_\alpha (h_{22}^\alpha)^2, \tag{7}$$

即 M 是伪脐的[2]. 以下假定 $g: M \to G_{2,n}$ 是共形的. 则从(3)，$(6)_2$ 和(7)可算得

$$\cos\alpha = \frac{\langle Jg_*(e_1), g_*(e_2)\rangle}{|Jg_*(e_1)| \cdot |g_*(e_2)|} = \frac{\sum_\alpha (h_{11}^\alpha h_{22}^\alpha - (h_{12}^\alpha)^2)}{\frac{1}{2}\|\sigma\|^2}, \tag{8}$$
$$\|\sigma\|^2 = \sum_\alpha ((h_{11}^\alpha)^2 + (h_{22}^\alpha)^2 + 2(h_{12}^\alpha)^2) = 2\sum_\alpha ((h_{11}^\alpha)^2 + (h_{12}^\alpha)^2).$$

式中 α 即是 g 的 Kaehler 角. 由 Gauss 方程 $(4)_4$ 可知

$$\cos\alpha = \frac{2K}{\|\sigma\|^2} = \frac{4|H|^2 - \|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2}, \tag{9}$$

其中 H 是 M 在 R^n 中的平均曲率向量. 从(9)易知，$\alpha=0$ 当且仅当 $\|\sigma\|^2 = 2|H|^2$，即 M 是全

脐的；而 $\alpha=\pi$ 当且仅当 $H=0$，即 M 是极小的.

定理 1 的证明 这是(9)的直接推论.

定理 2 的证明 因为 g 共形，故由[2]，M 是伪脐的. 另一方面，由[3,4]知 g 是调和映照当且仅当 H 在法丛中平行．由于 $\alpha\neq\pi$，故 $H\neq 0$. 由此及[5]定理 1 可推得 M 极小地落在 R^n 的某一超球面上. 由于 α 是常数，并且 $\alpha\neq\pi/2$，从(9)知 K 是非零常数. 这样，注意到 $\alpha\neq 0$，由[6]易推出定理 2 的结论.

参考文献：

[1] HOFFMAN D A and OSSERMAN R. *The geometry of the generalized Gauss map* [J]. Memo. of the Amer. Math. Soc., 1980, 236.

[2] OBATA M. *The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature* [J]. J. Diff. Geom., 1968, **2**: 217—223.

[3] RUH E A and VILMS J. *The tension field of the Gauss map* [J]. Tran. Amer. Math. Soc., 1970, **149**: 569—573.

[4] CHERN S S and GOLDBERG S I. *On the volume decreasing property of a class of real harmonic mappings* [J]. Amer. J. Math., 1975, **97**: 133—147.

[5] YAU S T. *Submanifolds with constant mean curvature I* [J]. Amer. J. Math., 1974, **96**: 346—366.

[6] BRYANT R L. *Minimal surfaces of constant curvature in* S^n[J]. Tran. Amer. Math. Soc., 1985, **290**: 259—271.

Surfaces in Euclidean Space with Conformal Gauss Map

WU Bing-ye

(Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

Abstract: In this paper surfaces in Euclidean space with conformal Gauss map are considered. A new characterization of Veronese surface is given from the point of view of Gauss map.

Key words: Gauss map; Pseudoumbilical; Veronese Surface; Kaehler angle.