第21卷第3期 数学研究与评论 Vol.21 No.3
2001年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug.2001

一类线性阻尼弹性系统的半群性质*

黄永忠[1]， 郭发明[2]
(1. 兰州大学数学系，甘肃 兰州 730000；2. 内江师范学院数学系，四川 内江 641112)

摘 要：本文讨论了 Hilbert 空间中一类二阶线性阻尼弹性系统中阻尼算子 $B=B_1+iB_2$ 的实部、虚部之定义域互不包含情形的系统半群性质.

关键词：半群；阻尼；可微性；解析性.
分类号：AMS(1991) 47D/CLC O177
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)03-0459-05

许多分布参数线性阻尼弹性系统可以表达为一个 Hilbert 空间 H 中的二阶微分方程

$$\begin{cases}\ddot{\omega}(t)+B\dot{\omega}(t)+A\omega(t)=0, & t>0\\ \omega(0)=\omega_0,\dot{\omega}(0)=\omega_1\end{cases}\tag{1}$$

这里“.”记为对时间求导，A,B 是 H 中的无界正定自伴线性算子，分别称为弹性算子和阻尼算子. 令 $x_1(t)=A^{\frac{1}{2}}\omega(t)$，$x_2(t)=\dot{\omega}(t)$，则我们得到相应的一阶系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & A^{\frac{1}{2}}\\ -A^{\frac{1}{2}} & -B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\stackrel{\triangle}{=}\mathscr{A}_B\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}, & t>0,\\ x_1(0)=A^{\frac{1}{2}}\omega_0,x_2(0)=\omega_1.\end{cases}\tag{2}$$

$\mathscr{A}_B$ 的闭包 $\overline{\mathscr{A}_B}$ 所生成半群 $\exp(\overline{\mathscr{A}_B}t)$ 的可微性和解析性已得到广泛研究(参看[1]所列文献). 这些文章中，阻尼算子 B 是实的而不含有虚部，但在具阻尼的声波或电磁波的系统中阻尼必须含有虚部以改变它的位相，例如在文[5]中研究的声波控制问题. 鉴于此，黄发伦对 B 含有虚部的情形分别进行了讨论. 令 $B=B_1+iB_2$，$D(B_1)$,$D(B_2)$ 分别为 B_1,B_2 的定义域. 黄发伦研究了 $D(B_1)\subset D(B_2)$ 和 $D(B_1)\supset D(B_2)$ 的情形，有关结论参见文[1]和[2]. 在本文，考虑 $D(B_1)$ 和 $D(B_2)$ 之间不存在包含关系的情形，得到一些半群性质.

1 主要结果

给出如下假设：

* 收稿日期：1998-10-22
作者简介：黄永忠(1965-)，男，副教授. 在读博士生. 现通讯地址：华中科技大学数学系.
E-mail：huang5464@263.net

(H_1) A,B_1 是 H 中的无界正定自伴线性算子，$B=B_1+iB_2$ 为闭算子，i 为虚单位.

(H_2) 若 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\beta<\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$,

$$D(A^\beta)\subset D(B_j)\subset D(A^\alpha),\ j=1,2. \qquad (*)$$

(H_3) 若 $0<\alpha<\beta<\frac{1}{2}$, ($H_2$)中的(*)式成立.

定理 1.1 若 A,B 满足条件(H_1),(H_2)，则 $\mathscr{A}_B$ 的闭包 $\overline{\mathscr{A}_B}$ 在 $H\oplus H$ 中生成一个可微半群，且如此半群 $\exp(\overline{\mathscr{A}_B}t)$ 是指数衰减的.

定理 1.2 若 A,B 满足条件(H_1),(H_3)，则 $\overline{\mathscr{A}_B}$ 在 $H\oplus H$ 中并不生成解析半群.

2 几个引理

引理 2.1 设 A 是 H 中一个无界正定自伴算子，$\beta>\frac{1}{2}$, $\rho>4s_0{}^{-2(\beta-1)}$,这里 $s_0\overset{\Delta}{=}\inf\{s:s\in\sigma(A)\}>0$,$\sigma(A)$ 为 A 的谱集.则存在 $M>0$,使对 $\alpha\in(0,\beta)$,成立

$$\|\lambda A^{(\beta-\alpha)}(\lambda^2+\lambda\rho A^\beta+A)^{-1}\|\leqslant M|\lambda|^{-\frac{\alpha}{\beta}},\quad \lambda\in C,\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0,\lambda\neq 0.$$

证明 设 $\mu^\pm=\mu^\pm(s)=\frac{1}{2}(-\rho s^\beta\pm\sqrt{\rho^2s^{2\beta}-4s})$,对于 $s>s_0$,注意到 $4\rho^{-2}s^{-(2\beta-1)}\leqslant 1$,我们有

$$|(\lambda-\mu^+)(\lambda-\mu^-)|^2\geqslant|\lambda|^2(|\lambda|^2+\frac{1}{4}\rho^2s^{2\beta}),\quad \mathrm{Re}\lambda\geqslant 0,s\geqslant s_0.$$

再由熟知不等式

$$x^py^{(1-p)}\leqslant px+(1-p)y\leqslant x+y,p\in(0,1),\ x,y>0,$$

令 $p=\frac{\alpha}{\beta}$,$x=|\lambda|^2$,$y=\frac{1}{4}\rho^2s^2\beta$,则得到 $s\geqslant s_0$ 时,

$$|\lambda s^{(\beta-\alpha)}(\lambda^2+\lambda\rho s^\beta+s)^{-1}|^2\leqslant(\frac{4}{\rho^2})^{1-\frac{\alpha}{\beta}}|\lambda|^{-\frac{2\alpha}{\beta}},\quad \mathrm{Re}\lambda\geqslant 0,\lambda\neq 0.$$

由[7]中的算子演算便得所要结论.

引理 2.2 设 A 如引理 2.1 所设,则对 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\beta<\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$,$\rho^2>s_0{}^{-(2\beta-1)}$,有 $M>0$ 成立

$$\|A^{(2\beta-\alpha)}(\lambda^2+\lambda\rho A^\beta+A)^{-1}\|\leqslant M|\lambda|^{-2(1-2\beta+\alpha)},\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0,\lambda\neq 0.$$

证明类似于引理 2.1,从略.

引理 2.3 设 $A,B=B_1+iB_2$ 满足条件(H_1),(H_2),则对 $\lambda\in C$,$\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$,$\Delta(\lambda)=\lambda^2+\lambda B+A$ 可逆,并使 $(\overline{\Delta}(\lambda))^{-1}\in L(H)$($H$ 中的有界线性算子所成空间),且成立

(Ⅰ) $\|\lambda B_1^{\frac{1}{2}}(\overline{\Delta}(\lambda))^{-1}B_1^{\frac{1}{2}}\|\leqslant 1$;

(Ⅱ) $\|\lambda B_1(\overline{\Delta}(\lambda))^{-1}\|\leqslant 1$;

(Ⅲ) $\|\lambda(\overline{\Delta}(\lambda))^{-1}B_1\|\leqslant 1$.

该引理前半部类似于文[8]引理 3.2 的前半部,证明相仿.为证(Ⅱ),(Ⅲ),令 $C=B_1^{\frac{1}{2}}\overline{\Delta}^{-1}(\lambda)B_1$,考虑解析函数 $T(u)x=B_1^{-(\frac{1}{2}+u)}CB_1^ux$,$u=\tau+i\omega$,$\tau\in[-1,0]$,由三线定理

[7,p520],再注意到 $D(B_1^{\frac{1}{2}})$ 的稠密性即得结论.

引理 2.4 设条件(H_1),(H_2)成立,则在 $H\oplus H$ 中,$\mathscr{A}_B$ 可闭,并且其闭包 $\overline{\mathscr{A}_B}$ 在 $H\oplus H$ 中生成 C_0-压缩半群 $\exp(\overline{\mathscr{A}_B}t)$,因此对任意 $(\omega_0,\omega_1)\in H\oplus H$,问题(1)对 $t\geqslant 0$ 存在唯一的广义解;对任意的 $(\omega_0,\omega_1)\in D(\mathscr{A}_B)$ 存在唯一的古典解.

证明 由假设,$D(A^\beta)\subset D(B)=D(B_1)\cap D(B_2)$,$D(\mathscr{A}_B)=D(A^{\frac{1}{2}})\oplus D(A^{\frac{1}{2}})\cap D(B)\supset D(A^{\frac{1}{2}})\oplus D(A^{\frac{1}{2}})\cap D(A^\beta)$ 在 $H\oplus H$ 中稠,从而 $\mathscr{A}_B{}^*$ 存在.类似得 $\mathscr{A}_B{}^{**}$ 存在,且 $\mathscr{A}_B\subset\mathscr{A}_B{}^{**}$,于是 $\mathscr{A}_B$ 可闭.易得 $\mathscr{A}_B$ 和 $\overline{\mathscr{A}_B}{}^*$ 的耗散性,由文[6],$\overline{\mathscr{A}_B}$ 生成一个 C_0-压缩半群.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 类似于[3]中定理 3.1,对 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$,有 $\lambda\in\rho(\overline{\mathscr{A}_B})$ (豫解集),并得到

$$(\lambda-\overline{\mathscr{A}_B})^{-1}=\begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}}\Delta^{-1}(\lambda)(\lambda+B)A^{-\frac{1}{2}} & A^{\frac{1}{2}}(\overline{\Delta}(\lambda))^{-1} \\ -(\overline{\Delta}(\lambda))^{-1}A^{\frac{1}{2}} & \lambda(\overline{\Delta}(\lambda))^{-1}\end{bmatrix}\in L(H\oplus H). \tag{3.1}$$

以下就对矩阵中元素进行估计.若不特别说明,以下 $\lambda\in C$,$\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$,$\lambda\neq 0$.取固定 $\rho>4s_0{}^{-(2\beta-1)}$,$s_0=\inf\{s:s\in\sigma(A)\}>0$,令 $\Delta_0(\lambda)=\lambda^2+\lambda\rho A^\beta+A$.由引理 2.1 至引理 2.3,得到

$$\begin{aligned}\|\lambda\Delta^{-1}(\lambda)\| &= \|\lambda A\Delta_0{}^{-1}(\lambda)+\lambda\Delta_0{}^{-1}(\lambda)(\rho\lambda A^\beta-\lambda B)\Delta^{-1}(\lambda)\| \\ &\leqslant M|\lambda|^{-\frac{\epsilon}{\beta}}[\|A^{-(\beta-\epsilon)}\|+(\rho+\|A^{-(\beta-\epsilon)}BA^{-\epsilon}\|)\|A^\epsilon B_1{}^{-1}\|] \\ &= M_1|\lambda|^{-\frac{\epsilon}{\beta}},\end{aligned} \tag{3.2}$$

这里 M_1 为 $|\lambda|^{-\frac{\epsilon}{\beta}}$ 的系数.由算子 A,B 定义域的相互关系,有 $A^{-(\beta-\epsilon)}BA^{-\epsilon}\in L(H)$,$A^\epsilon B_1{}^{-1}\in L(H)$,$A^{\frac{1}{2}}B_1{}^{-1}\in L(H)$,从而有

$$\|A^{\frac{1}{2}}\|\leqslant\|A^{\frac{1}{2}}B_1{}^{-1}\|\,\|B_1\Delta^{-1}(\lambda)\|\leqslant\|A^{\frac{1}{2}}B_1{}^{-1}\|\,|\lambda|^{-1}. \tag{3.3}$$

同理可得

$$\|\Delta^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}\|\leqslant\|\overline{B_1{}^{-1}A^{\frac{1}{2}}}\|\,|\lambda|^{-1}. \tag{3.4}$$

由引理 2.2 和引理 2.3,又有

$$\begin{aligned}\|B\Delta^{-1}(\lambda)\| &= \|B\Delta_0{}^{-1}(\lambda)+B\Delta_0{}^{-1}(\lambda)(\lambda\rho A^\beta-\lambda B)^{-1}(\lambda)\| \\ &\leqslant M|\lambda|^{-2(1-\beta+\epsilon)}\|BA^{-\beta}\|[\|A^{-(\beta-\epsilon)}\|+(\rho+\|A^{-(\beta-\epsilon)}BA^{-\epsilon}\|)\|A^\epsilon B_1{}^{-1}\|] \\ &= M_2|\lambda|^{-2(1-\beta+\epsilon)},M_2\text{ 为某常数}.\end{aligned}$$

于是由式(3.2)有 $\|\lambda^{-1}A\Delta^{-1}(\lambda)\|\leqslant|\lambda|^{-1}+M_2(|\lambda|^{-\frac{\epsilon}{\beta}}+|\lambda|^{-2(1-\beta+\epsilon)})$.同理可得

$$\|\lambda^{-1}\Delta^{-1}(\lambda)A\|\leqslant|\lambda|^{-1}+M_2(|\lambda|^{-\frac{\epsilon}{\beta}}+|\lambda|^{-2(1-\beta+\epsilon)}).$$

对 $x\in D(A)$,考虑解析函数 $T(u)x=\lambda^{-1}A^{-(1+u)}C_1A^ux$,这里 $C_1=A\Delta^{-1}(\lambda)A$,$u=\tau+i\omega$,$\tau\in[-1,0]$,$\omega\in(-\infty,\infty)$,对 $u=\frac{1}{\,}$,由三线定理,得

$$\|\lambda^{-1}A^{\frac{1}{2}}\Delta^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}x\|\leqslant\sup_{x\in R}\|T(i\omega)x^{\frac{1}{2}}\|\sup_{x\in R}\|T(-1+i\omega)x^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \| \lambda^{-1}\Delta^{-1}(\lambda)A \|^{\frac{1}{2}} \| \lambda^{-1}A\Delta^{-1}(\lambda) \|^{\frac{1}{2}} \| \ \| x \|.$$

由 $D(A)$ 的稠密性，有

$$\| \lambda^{-1}A^{\frac{1}{2}}\Delta^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}x \| \leqslant |\lambda|^{-1} + M(|\lambda|^{-\frac{\alpha}{\beta}} + |\lambda|^{-2(1-\beta+\alpha)})$$

$$\| A^{\frac{1}{2}}\Delta^{-1}(\lambda)(\lambda + B)A^{\frac{1}{2}}x \| \leqslant |\lambda|^{-1} + M(|\lambda|^{-\frac{\alpha}{\beta}} + |\lambda|^{-2(1-\beta+\alpha)}). \tag{3.5}$$

这样，由式(3.1)—(3.5)，便知存在 $\overline{M} > 0, \gamma > 0$，使得

$$\| (\lambda - \overline{\mathscr{A}_B})^{-1} \| \leqslant \overline{M}|\lambda|^{-\gamma}.$$

由半群理论[6]，$\overline{\mathscr{A}_B}$ 在 $H \oplus H$ 中生成一个可微半群 $\exp(\overline{\mathscr{A}_B}t)$.

此外，由条件(H_2)，$D(B) \cap D(B^*) = D(B_1) \cap D(B_2) \supset D(A)$，依文[4]引理 2.1($a$)，$\overline{A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}} \in L(H)$，从而 $\lambda = 0 \in \rho(\overline{\mathscr{A}_B})$，于是由式(3.5)，$\{\lambda: \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0\} \subset \rho(\overline{\mathscr{A}_B})$，且 $\sup\{ \| (\lambda - \overline{\mathscr{A}_B})^{-1} \|, \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0\} < +\infty$，由文[4]中定理 2' 知 $\exp(\overline{\mathscr{A}_B}t)$ 是指数衰减的. 定理得证.

定理 1.2 的证明 若不然，由半群理论[6]，存在常数 $M>0, \tau_0 \geqslant 0$ 使得

$$\| (\lambda - \overline{\mathscr{A}_B})^{-1} \| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|} \quad \lambda \in C, \mathrm{Re}\lambda \geqslant \tau_0,$$

从而由式(3.1)有

$$\| A^{\frac{1}{2}}\Delta^{-1}(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}, \| \lambda\Delta^{-1}(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant \tau_0. \tag{3.6}$$

令 $\Delta_0(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\rho A^\beta + A$，则由文[4]引理 3.5(a)有

$$\begin{aligned} \| A^{\frac{1}{2}}\Delta_0^{-1}(\lambda) \| &= \| A^{\frac{1}{2}}\Delta^{-1}(\lambda) + A^{\frac{1}{2}}\Delta^{-1}(\lambda)(\lambda B - \lambda\rho A^\beta)\Delta_0^{-1}(\lambda) \| \\ &\leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}(1 + (\| B_1A^{-\beta} + \rho)\rho^{-1}), \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant \tau_0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

同理可得

$$\| \Delta_0^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}} \| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}(1 + (\| B_1A^{-\beta} \| + \rho)\rho^{-1}), \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant \tau_0 \tag{3.8}$$

$$\| \lambda\Delta_0^{-1}(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}(1 + (\| B_1A^{-\beta} \| + \rho)\rho^{-1}), \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant \tau_0 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &\| A^{\frac{1}{2}}\Delta_0^{-1}(\lambda)(\lambda + \rho A^\alpha)A^{-\frac{1}{2}} \| = \| \lambda\Delta_0^{-1}(\lambda) + \rho A^{-(\frac{1}{2}-\beta)}A^{\frac{1}{2}}\Delta_0^{-1}(\lambda) \| \\ &\leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}(1 + (\| B_1A^{-\beta} \| + \rho)\rho^{-1})(1 + \rho \| A^{-(\frac{1}{2}-\beta)} \|). \end{aligned} \tag{3.10}$$

因此，由式(3.1)、(3.7)—(3.10)，存在常数 $M_0>0$，使

$$\| (\lambda - \overline{\mathscr{A}_{\rho A^\beta}})^{-1} \| \leqslant \frac{M_0}{1+|\lambda|} \quad \lambda \in C, \mathrm{Re}\lambda \geqslant \tau_0.$$

由半群理论[6]，$\overline{\mathscr{A}_{\rho A^\beta}}$ 生成解析半群，这与文[3]中定理 3.4(C)相矛盾，故 $\overline{\mathscr{A}_B}$ 并不生成解析半群.

参考文献：

[1] 黄发伦，黄永忠，郭发明. 相应于具阻尼的 Euler-Bernoulli 梁方程的 C_0-半群的解析性和可微性 [J]. 中

国科学(A辑)，1992，2：122—133.
HUANG Fa-lun, HUANG Yong-zhong, GUO Fa-ming. *Analyticity and differentiability of C_0-semigroups associated with Euler-Bernoulli beam equation with damping* [J]. Sci. in China, 1992, **2**: 122—133. (in Chinese)

[2] 黄永忠. 相应于耗散延拓线性阻尼弹性系统 C_0-半群的可微性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1997，**22**(3)：233—241.
HUANG Yong-zhong. *Differentiable properties of the C_0-semigroup associated with dissipation continuation linear damped elastic system* [J]. J. Southwest China Normal Univ. (Natural Sci.), 1997, **22**(3): 233—241. (in Chinese)

[3] HUANG Fa-lun. *On the mathematical model for linear elastic systems with analytic damping* [J]. SIAM J. Cont. Opt., 1988, **26**(3): 714—724

[4] HUANG Fa-lun. *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces* [J]. Ann. Diff. Eqs., 1985, **1**(1): 43—56.

[5] CHEN G and BRIDGES T J. *Optimal boundary impedance for the minimazation of reflection (I): Asymptopic solution by the geometrical optics method* [J]. Opt. Cont. Appl. Methods, 1985, **6**: 141—149.

[6] PAZY A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1983. 20, 52, 60.

[7] DUNFORD N and SCHWARTZ J T. *Linear Operators (part I)* [M]. New York: Wiley-Interscience, 1958. 520.

[8] HUANG Fa-lun, LIU Kang-sheng and CHEN Goong. *Differentiability of the semigroup associated with a structural damping model* [C]. Proceedings of 28th conference on decision and control, Tamps, Florida, 1989, 2034—2038.

Semigroup Properties for a Class of Linear Damped Elastic System

HUANG Yong-zhong[1], GUO Fa-ming[2]

(1. Dept. of Math., Lanzhou University, Gansu 730000, China;
2. Dept. of Math., Neijiang Teachers' College, Sichuan 641112, China)

Abstract: The semigroup properties of the second order linear damped elastic system in Hilbert spaces for the damped operator $B = B_1 + iB_2$ in which $D(B_1)$ and $D(B_2)$ don't contain each other are discussed, where $D(\cdot)$ is the domain for some operator, i is the imaginary unit.

Key words: Semigroup; damp; differentiability; holomorphic property.