第21卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 21 No. 4
2001年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 2001

环上线性群的子群结构*

王 登 银
（安徽大学数学系，安徽 合肥 230039）

摘　要：本文主要讨论欧氏整环上线性群一类子群的结构，并获得其一类极大子群。

关键词：欧氏整环；线性群；扩群；极大子群．
分类号：AMS(1991) 20F28，20E32/CLC O152.3
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2001)04-0611-04

1 引　言

有限典型群极大子群的分类工作已经基本完成[1-2]，对任意域上典型群极大子群的研究正逐渐走向深入[3-4]，与此同时，不少群论工作者已着手在体上，甚至于在环上研究典型群的子群结构[5]．可以说欧氏整环上典型群比一般环上典型群具有更优美的结构，比域上典型群具有更丰富的内容，本文将主要在欧氏环上讨论线性群的一类子群的结构．

对含幺交换环 R，以 $GL(n,R)$，$SL(n,R)$ 分别表示 R 上 n 级一般线性群和特殊线性群，$Mat_{m\times n}(R)$ 表示 R 上全体 $m\times n$ 矩阵集合．对任意 $1\leqslant i,j\leqslant n$，$e_{ij}$ 表示这样的 n 级方阵，其 (i,j) 元为 1，其余元全为零．对 $i\neq j$，$s\in R$，记 $Tij(s)=I+se_{ij}$，则当 $s\neq 0$ 时，$T_{ij}(s)$ 是 $SL(n,R)$ 中的一个平延．当 $i\neq j$ 时，记 $P_{ij}=I-e_{ii}-e_{jj}+e_{ij}-e_{ji}$，并规定 $P_{ii}=I$．

记 R 的单位群为 U，U 关于整数环 Z 的群代数为 $Z[U]$，则 $Z[U]$ 是 R 的子环，R 可视为 $Z[U]$ 模．

当 $n\geqslant 2$ 时，对任意固定的 $0<r<n$，以及 R 中任意理想 S，定义

$$Pr(n,S)=\left\{\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\in GL(n,R)\,\middle|\,A\in GL(r,R),\ B\in GL(n-r,R),C\in Mat_{(n-r)\times r}(S)\right\},$$

$$Qr(n,S)=Pr(n,S)\cap SL(n,R).$$

则显然 $Pr(n,S)$，$Qr(n,S)$ 均为 $GL(n,R)$ 的子群．

再令 $Pr(n,S)$ 到 U 上的行列式映射为 Ψ_S．即 $\Psi_S:Pr(n,S)\to U$，$A\to \det A\,(A\in Pr(n,S))$．

* 收稿日期：1998-06-29
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19671079)
作者简介：王登银(1965-)，男，安徽肥西人，博士，副教授．

显然 Ψ_S 是 $\mathrm{Pr}(n,S)$到 U 上的满同态，且 $\mathrm{Ker}\Psi_S=\mathrm{Qr}(n,S)$. 因而 Ψ_S 诱导出 $\mathrm{Pr}(n,S)/\mathrm{Qr}(n,S)$到 U 的同构. 可见 $\mathrm{Pr}(n,S)$中所有包含 $\mathrm{Qr}(n,S)$的子群与 U 中所有子群在映射 Ψ_S 下一一对应. 可见

引理 1 对 R 中任意理想 S，如果 $\mathrm{Qr}(n,S)\leqslant X\leqslant \mathrm{Pr}(n,S)$，则存在 U 的子群 V，使

$$X=\Psi_S^{-1}(V).$$

当 $n=2$ 时(此时 $r=1$)，对 R 的任意 $Z[U]$子模 M，令：

$$\mathrm{Pr}(2,M)=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(2,R)\,\middle|\, c\in M;a,b\in U\right\},$$

$$\mathrm{Qr}(2,M)=\mathrm{Pr}(2,M)\cap \mathrm{SL}(2,R).$$

易见 $\mathrm{Pr}(2,M)$，$\mathrm{Qr}(2,M)$均为 $\mathrm{GL}(2,R)$的子群.

当 $n\geqslant 3$，R 为欧氏整环时，定出了 $\mathrm{Qr}(n,0)$在 $\mathrm{Pr}(n,R)$中的所有扩群，而当 $n=2$，R 为一般的含幺交换环时，我们定出了 $\mathrm{Pr}(2,0)$在 $\mathrm{Pr}(2,R)$中的所有扩群. 结果如下

定理 1 $n\geqslant 3$，R 为欧氏整环，对于任意 $0<r<n$ 的正整数 r. 如果 $\mathrm{Qr}(n,0)\leqslant X\leqslant \mathrm{Pr}(n,R)$，则存在 R 的理想 S，U 的子群 V，使得 $X=\Psi_S^{-1}(V)$.

定理 2 $n=2(r=1)$，R 为含幺交换环. 如果 $\mathrm{Pr}(2,0)\leqslant X\leqslant \mathrm{Pr}(2,R)$，则存在 R 的 $Z[U]$子模 M，使得 $X=\mathrm{Pr}(2,M)$.

2 定理的证明

为了证明定理 1，先介绍以下这个熟知的结果.

引理 2[6] 设 R 为欧氏整环，对任意 $A\in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$，存在 $g_1\in \mathrm{SL}(n,R)$，$g_2\in \mathrm{SL}(m,R)$，使 g_2Ag_1 具有标准形

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_t \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $t=\mathrm{rank}A$，$d_i\neq 0(1\leqslant i\leqslant t)$，且 $d_i\mid d_{i+1}(\forall\ 1\leqslant i\leqslant t-1)$，$d_1$ 是 A 中各分量的最大公因子.

定理 1 的证明 只要证明存在 R 的理想 S 使 $\mathrm{Qr}(n,S)\leqslant X\leqslant \mathrm{Pr}(n,S)$，再应用引理 1，即可推出定理 1 的结果. 设 S 是使 $\mathrm{Qr}(n,S)\leqslant X$ 成立的 R 的理想中的极大元，只要证明 $X\leqslant \mathrm{Pr}(n,S)$ 即可，否则推出矛盾.

假设 $X\not\leqslant \mathrm{Pr}(n,S)$. 任取 $g=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\in X-\mathrm{Pr}(n,S)$，其中 $A\in \mathrm{GL}(r,R)$，$B\in \mathrm{GL}(n-r,R)$，$C\in \mathrm{Mat}_{(n-r)\times r}(R)$. 必然 $C\notin \mathrm{Mat}_{(n-r)\times r}(S)$. 令 $Y=\langle g,Qr(n,S)\rangle$，则 $X\geqslant Y>Qr(n,S)$. 在 Y 中以 $g\cdot\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$代替 g，不妨一开始就令 $g=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$，$C\notin \mathrm{Mat}_{(n-r)\times r}(S)$. C 中各分量的最大公因子 $c_1\notin S$，由引理 2 知存在 $P\in \mathrm{SL}(n-r,R)$，$Q\in \mathrm{SL}(r,R)$使

$$\bar{C} = PCQ = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_t \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $t=\mathrm{rank}C, c_1|c_2\cdots|c_t$. 由于$\begin{pmatrix} Q^{-1} & \\ & P \end{pmatrix}\in \mathrm{Qr}(n,0)$于是可得 $g_1 = \begin{pmatrix} Q^{-1} & \\ & P \end{pmatrix}\cdot g \cdot \begin{pmatrix} Q & \\ & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ \bar{C} & \bar{B} \end{pmatrix}$, 其中 $\bar{B} = PBP^{-1}$. 由于假设了 $n\geqslant 3$, 不妨设 $r \geqslant 2$. 因而 $T_{12}(1)\in \mathrm{Qr}(n,0)$. 可得 $g_2 = g_1 T_{12}(1) g_1^{-1} T_{12}(-1) = T_{r+1,2}(c_1)$. 又因为 $P_{12}\in \mathrm{Qr}(n,0)$, 可得 $g_3 = P_{12}T_{r+1,2}(c_1)P_{12}^{-1} = T_{r+1,1}(c_1)$. 对于任意 $a\in R, T_{12}(a)\in \mathrm{Qr}(n,0)$, 得

$$T_{r+1,2}(ac_1) = T_{r+1,1}(c_1)T_{12}(a)T_{r+1,1}(-c_1)T_{12}(-a)\in Y - \mathrm{Qr}(n,S),$$

其中 ac_1 取遍了 c_1 生成的理想 c_1R.

令 $S_0 = S + c_1R$, 则 S_0 是真包含 S 的理想. 对 $i\neq j$, 令 $T_{ij}(S_0) = \langle T_{ij}(t)\,|\,t\in S_0\rangle$, 此为 $\mathrm{SL}(n,R)$ 的子群. 由于 $T_{r+1,2}(c_1R), T_{r+1,2}(S)$ 均为 Y 的子群, 可见 $T_{r+1,2}(S_0)\leqslant Y$. 于是对 $\forall\, 1\leqslant j\leqslant r, T_{r+1,j}(S_0) = P_{j2}T_{r+1,2}(S_0)P_{j2}^{-1}\leqslant Y$. 接着对 $\forall\, r+1\leqslant i\leqslant n, T_{ij}(S_0) = P_{r+1,i}T_{r+1,j}(S_0)P_{r+1,i}^{-1}\leqslant Y$. 又由于 $\mathrm{Qr}(n,S_0)$ 可由 $\mathrm{Qr}(n,0)$ 及所有 $T_{ij}(S_0)(r+1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant r)$ 生成, 因而 $\mathrm{Qr}(n,S_0)\leqslant Y$. 这与 S 是使 $\mathrm{Qr}(n,S)\leqslant X$ 成立的 R 的理想中的极大元矛盾. □

定理 2 的证明　设 M 是使 $\mathrm{Pr}(2,M)\leqslant X$ 成立的 R 中极大的 $Z[U]$ 子模, 要证 $X = \mathrm{Pr}(2,M)$, 否则推出矛盾.

假设 $X\neq Pr(2,M)$, 任取 $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}\in X - \mathrm{Pr}(2,M), a、b\in U, c\in R$ 但 $c\notin M$. 易知 $g_1 = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot g\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\in X - \mathrm{Pr}(2,M)$. 以下对 $\forall\, x\in Z[U]$ 证明$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cx & 1 \end{pmatrix}\in X$. 不妨设 $x = \sum_{u\in U} m_u u, m_u\in Z, u\in U$, 易见

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cx & 1 \end{pmatrix} = \prod_{u\in U}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cu & 1 \end{pmatrix}^{m_u} = \prod_{u\in U}\left[\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{m_u}\in X.$$

进而对 $\forall\, a,b\in U, x\in Z[U]$, 得

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ cx & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cx & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\in X.$$

令 $M_0 = M + cZ[U]$, M_0 是真包含 M 的 $Z[U]$的子模, 易见 $\mathrm{Pr}(2,M_0)\leqslant X$, 这与 M 的极大性取法矛盾. □

3　应　用

由定理 1、定理 2 立即得出下面关于线性群极大子群的判定.

推论 1　$n\geqslant 3$, R 为欧氏整环, 对于任意正整数 $0<r<n$. 如果 S 是 R 的极大理想, 则 $\mathrm{Pr}(n,S)$是 $\mathrm{Pr}(n,R)$的极大子群.

推论 2　$n=2$ $(r=1)$，R 为含幺交换环. 如果 M 是 R 的极大 $Z[U]$子模，则 $\mathrm{Pr}(2,M)$是 $\mathrm{Pr}(2,R)$的极大子群.

参考文献：

[1] ASCHBACHER M. *On the maximal subgroups of the finite Classical groups* [J]. Invent. Math., 1984, **76**: 469—514.

[2] KLEIDMAN P and LIEBECK M. *The subgroup structure of the finite classical groups* [M]. Cambridge Univ, Press, 1989.

[3] LI Shang-zhi. *Maximal subgroups in classical groups over arbitrary fields* [J]. Proceeding of Symposia in Pure Math., 1987, **47**: 487—493.

[4] KING O H. *Some maximal subgroups of the classical groups* [J]. J. Algebra, 1981, **68**: .

[5] LI Shang-zhi. *Overgroups in $GL(nr,F)$ of certain subgroups of $SL(n,K)$ (I)* [J]. J. Algebra, 1989, **125**: 215—235.

[6] 冯克勤. 交换代数基础 [M]. 北京:高等教育出版社,1985.
FENG Ke-qin. *Basis of Commutative Algebra* [M]. Beijing: High Education Publishing House, 1985. (in Chinese)

The Subgroup Structure of Linear Groups over Rings

WANG Deng-yin

(Dept. of Math., Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: In this paper, We make some researches on the subgroup structure of the linear groups over rings , particularly over $E\ D$ rings, and obtain a type of maximal subgroups.

Key words: $E\ D$ rings; linear groups; overgroups; maximal subgroups.