第21卷第4期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 4
2001年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2001

初等图形在球面型空间的实现问题*

杨 世 国
(安徽教育学院数学系，安徽 合肥 230061)

摘 要：本文提出并解决了初等图形在球面型空间实现的问题：预给两两之间度量的几何元素 $e_1,e_2\cdots,e_{l-1},e_{l+1},\cdots,e_N$ (e_i 为点或超平面)，初等图形 $\{e_1,\cdots,e_{l-1},e_{l+1},\cdots,e_N\}$ 在球面型空间实现的充分必要条件是什么？

关键词：初等图形；球面型空间；次特征值；嵌人.
分类号：AMS(1991) 51M16/CLC O186
文献标识码：A 　　**文章编号**：1000-341X(2001)04-0623-06

1 引 言

满足某些几何度量的几何图形能否在某种空间实现的问题是度量几何中最重要的问题. 文[1]中圆满解决了复合形在欧氏空间实现问题. 文[2－9]中解决了常曲率空间中等长嵌入、等角嵌入问题，以及欧氏空间中几种度量并存的嵌入问题. 本文提出并解决几种度量并存的初等图形在球面型空间嵌入问题.

设 $S_{n-1,1}$ 表示 n 维欧氏空间 E^n 中半径为1中心为 O 的 $n-1$ 维超球面，E^n 中过点 O 的 $n-1$ 维定向超平面 e' 与 $S_{n-1,1}$ 的交为球面型空间 $S_{n-1,1}$ 的定向超平面. 约定球面上一点 P 到 E^n 中定向超平面 e' 的带号距离与球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中点 P 到定向超平面 e 的带号距离的符号相同. 另外，$S_{n-1,1}$ 中两定向超平面 e_i 与 e_j 所成的角 ψ_{ij} 即为 E^n 两定向超平面 e_i' 与 e_j' 所成的角[10].

不失一般性，只考虑 $S_{n-1,1}$ 中的有关嵌入问题. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_{l-1},e_{l+1},e_{l+2},\cdots,e_{l+m}$ 为球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中的点或定向超平面，我们引入两元素 e_i 与 e_j 间之度量 $\bar{g}_{ij}=\bar{g}(e_j,e_i)=\bar{g}(e_j,e_i)=\bar{g}_{ji}$ 如下：

$$\bar{g}_{ij}=\begin{cases}-2\sin\dfrac{s_{ij}}{2} & (e_i,e_j\text{ 为点})；\\ \sin t_{ij} & (e_i\text{ 为点},e_j\text{ 为超平面})；\\ \cos\psi_{ij} & (e_i,e_j\text{ 为超平面}).\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 s_{ij} 表示点 e_i 与 e_j 间的球面距离；t_{ij} 表示点 e_i 到面 e_j 的带号距离；ψ_{ij} 表示面 e_i 与 e_j 所

* 收稿日期：1998-02-10
基金项目：安徽省教委科研基金资助项目(97JL0146)
作者简介：杨世国(1952-)，男，教授.

成的角. $\bar{g}_{ij}$ 是元素对 (e_i, e_j) 的运动不变量,它确定了元素对 e_i 与 e_j 的相对位置.

定理 1 设 $l-1$, $m(N=l+m)$ 为非负整数,给定 $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ 个实数 r_{ij}($1 \leqslant i < j \leqslant N, i, j \neq l$),如果对 $j=l+1, l+2, \cdots, l+m$ 均有 $r_{1j} \neq 0$, 则 $n-1$ 维球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中存在点 $e_1, e_2, \cdots, e_{l-1}$ 及定向超平面 $e_{l+1}, e_{l+2}, \cdots, e_{l+m}$, 使 $e_1, \cdots, e_{l-1}, e_{l+1} \cdots, e_{l+m}$ 中任意两元素之度量 $\bar{g}_{ij} = \bar{g}(e_i, e_j) = r_{ij}$ 的充分必要条件是 $(N+1) \times (N+1)$ 阶方阵

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ & A' & D' & \\ \vdots & & & \\ & D'^{\tau} & B' & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

的次特征值中至多 n 个为正,其余皆为零.

其中 A' 为 $l \times l$ 阶实对称矩阵

$$A' = \begin{bmatrix} & & -\frac{1}{2} \\ & & \vdots \\ & g'_{ij} & \\ & & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \cdots \quad -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leqslant 1 \leqslant i, j \leqslant l-1), \tag{1.3}$$

B' 为 $m \times m$ 阶实对称矩阵, D' 为 $l \times m$ 阶实矩阵:

$$B' = [g'_{ij}]_{i,j=l+1}^{l+m}; \quad D' = [g'_{ij}] \quad (1 \leqslant i \leqslant l, l+1 \leqslant j \leqslant l+m). \tag{1.4}$$

D'^{τ} 为 D' 的转置矩阵. 其中 D' 中的第 l 行元素 $g'_{lj} = -\frac{1}{2}(1-\bar{g}_{1j}^2)$ $(j=l+1, \cdots, l+m)$, A', B', D', D'^{τ} 中的元素 $g'_{ij}(i, j \neq l)$ 定义如下:

$$g'_{ij} = \begin{cases} \bar{g}_{ij} & (e_i \text{ 与 } e_j \text{ 均为点}, i \neq j), \\ -\frac{1}{2}(\bar{g}_{1i}^2 + \frac{1}{2}\bar{g}_{1j}^2 - 2\bar{g}_{1i}\bar{g}_{1j}\bar{g}_{ij}) & (e_i \text{ 与 } e_j \text{ 均为超平面}, i \neq j), \\ \bar{g}_{1i} + \frac{1}{2}\bar{g}_{1j}^2 - \bar{g}_{1j}\bar{g}_{ij} & (e_i \text{ 为点}, e_j \text{ 为超平面}), \\ 0 & (i=j). \end{cases} \tag{1.5}$$

2 引理及定理的证明

设 $\{e'_1, e'_2, \cdots, e'_N\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的点或定向超平面所构成的集合,在每两个元素 e'_i 与 e'_j 之间引进度量 $g_{ij} = g(e'_i, e'_j) = g_{ji}$ 如下:

$$g_{ij}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}d_{ij}^2 & (e_i',e_j'\text{ 皆为点}),\\ \cos\varphi_{ij} & (e_i',e_j'\text{ 皆为超平面}),\\ h_{ij} & (e_i'\text{ 为点},e_j'\text{ 为超平面}).\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 d_{ij} 表示点 e_i' 与 e_j' 间的欧氏距离，φ_{ij} 为两定向超平面 e_i' 与 e_j' 间的夹角，h_{ij} 为点 e_i' 到超平面 e_j' 的带号距离.

引理 1 给定 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个实数 $a_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant N)$ 和负非负实数 l,m，如果对 $j=l+1,l+2,\cdots,l+m$ 均有 $a_{1j}\neq 0$，则在 n 维欧氏空间 E^n 中存在点 $e_1',e_2',\cdots,e_l'$ 及定向超平面 $e_{l+1}',e_{l+2}',\cdots,e_{l+m}'(l+m=N)$，使其中任意两元素 e_i' 与 e_j' 之度量 $g(e_i',e_j')=g_{ij}=a_{ij}$ 的充分必要条件是方阵

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & & & \\ \vdots & & \widetilde{g}_{ij} & \\ 1 & & & \end{bmatrix}\quad(1\leqslant i,j\leqslant N) \tag{2.2}$$

的次特征值中至多 n 个为正，其余皆为零. 其中

$$\widetilde{g}_{ij}=\begin{cases}g_{ij} & (e_i'\text{ 与 }e_j'\text{ 均为点},i\neq j,)\\ -\dfrac{1}{2}(g_{1i}^2+g_{1j}^2-2g_{1i}g_{1j}g_{ij}) & (e_i'\text{ 与 }e_j'\text{ 均为超平面},i\neq j),\\ g_{1i}+\dfrac{1}{2}g_{1j}^2-g_{1j}g_{ij} & (e_i'\text{ 为点},e_j'\text{ 为超平面}),\\ 0 & (i=j).\end{cases} \tag{2.3}$$

只要在[7]中的定理 1 里取 $k=0$ 便得引理 1.

引理 2 设 E^n 中 $n-1$ 维单位球面 $S_{n-1,1}$ 的中心为 O，点 $e_i,e_j\in S_{n-1,1}$，球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中的定向超平面 e_k 为 E^n 中过点 O 的定向 $n-1$ 维超平面 e_k' 与 $S_{n-1,1}$ 的交，点 e_i 与 e_j 间的欧氏距离和球面距离分别为 d_{ij},s_{ij}，在 E^n 中点 e_i 到超平面 e_k 的带号距离为 h_{ik}，在 $S_{n-1,1}$ 中点 e_i 到超平面 e_k 的带号距离为 t_{ik}，则有

$$d_{ij}^2=4\sin^2\frac{s_{ij}}{2}, \tag{2.4}$$

$$h_{ik}=\sin t_{ij}. \tag{2.5}$$

证明 在 $\triangle Oe_je_i$ 中，$\angle e_iOe_j=s_{ij}$，$|Oe_i|=|Oe_j|=1$，$|e_ie_j|=d_{ij}$，由三角形之余弦定理便知(2.4)式成立.(2.5)式成立是显而易见的.

定理 1 的证明 设 E^n 中 $n-1$ 维单位球面 $S_{n-1,1}$ 之中心为 $e'_l=O$，那么球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中存在点 $e_1,e_2\cdots,e_{l-1}$ 和定向超平面 $e_{l+1},e_{l+2},\cdots e_{l+m}$，使其中任意两元素 e_i,e_j 间之度量为 $\overline{g}_{ij}=\overline{g}(e_i,e_j)(i,j\neq l)$ 的充分必要条件是：E^n 中存在 l 个点 $e_i'=e_i(i=1,2,\cdots,l-1)$，$e_l'$ 和 m 个定向超平面 $e_{l+j}'(e_{l+j}'\cap S_{n-1,1}=e_{l+j},j=1,2,\cdots,m)$，使其中任意两元素 e_i',e_j' 间之度量为

$$\begin{cases} g_{ij}=g(e_i',e_j')=-\frac{1}{2}d_{ij}^2=-2\sin^2\frac{s_{ij}}{2}=\overline{g}_{ij} & (i,j=1,2,\cdots,l-1), \\ g_{il}=g(e_i',e_l')=-\frac{1}{2} & (i=1,2,\cdots,l-1), \\ g_{ij}=g(e_i',e_j')=h_{ij}=\sin t_{ij}=\overline{g}_{ij} & (1\leqslant i\leqslant l-1, l+1\leqslant j\leqslant l+m), \\ g_{ij}=g(e_i',e_j')=\cos\varphi_{ij}=\cos\psi_{ij}=\overline{g}_{ij} & (l+1\leqslant i,j\leqslant l+m), \\ g_{lj}=g(e_l',e_j')=h_{lj}=0. & (j=l+1,\cdots,l+m). \end{cases} \tag{2.6}$$

由引理 1 知，E^n 中存在 l 个点 $e_i'(i=1,2,\cdots,l)$ 和 m 个定向超平面 $e_{l+j}'(j=1,2,\cdots,m)$，使其中任意两元素 e_i',e_j' 间之度量 $g_{ij}=g(e_i',e_j')$ 满足(2.6)式的充分必要条件是：$(N+1)\times(N+1)$ 阶方阵

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \widetilde{g}_{ij} & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

的次特征值中至多 n 个为正，其余皆为零. 其中 $\widetilde{g}_{ij}$ 如(2.3)中所述. 将(2.6)中诸式代入矩阵 M 中，并利用(1.7)式和 $g_{lj}'=-\frac{1}{2}(1-\overline{g}_{1j}^2)(j=l+1,\cdots,l+m)$，便知 $M=M'$.

综上所述，球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中存在点 $e_i(i=1,2,\cdots,l-1)$ 和定向超平面 $e_{l+j}(j=1,2,\cdots,m)$，使其中任意两元素 e_i,e_j 间之度量为 $\overline{g}_{ij}=\overline{g}(e_i,e_j)=r_{ij}$ 的充分必要条件是：$(N+1)\times(N+1)$ 阶方阵 M' 的次特征值中至多 n 个为正，其余皆为零. 定理 1 证毕.

定理 1 中条件的检验是可行的. 当定理 1 中条件满足时，可以用构造性的方法在 $S_{n-1,1}$ 中作出初等图形 $\{e_1,\cdots,e_{l-1},e_{l+1},\cdots,e_{l+m}\}$. 具体做法如下：

当定理 1 中条件满足时，由(2.6)式得到 $\frac{1}{2}N(N-1)(N=l+m)$ 个实数 $g_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant N)$ 满足引理 1 中条件，利用[7]中的构造法可作出 E^n 中 l 个点 $e_i'(i=1,2,\cdots,l)$ 和 m 个定向超平面 $e_{l+j}'(j=1,2,\cdots,m)$，使其中任意两元素 e_i,e_j 间之度量为 $g_{ij}=g(e_i,e_j)$，由定理 1 的证明可知，球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中的点 $e_i=e_i'(i=1,2,\cdots,l-1)$ 和定向超平面 $e_{l+j}=e_{l+j}'\cap S_{n-1,1}(j=1,2,\cdots,m)$ 构成的集合 $\{e_1,\cdots,e_{l-1},e_{l+1},\cdots,e_{l+m}\}$ 为所求 $S_{n-1,1}$ 中的初等图形.

考虑定理 1 的一种特殊情况，可得下面一个推论. 在定理 1 中取 $m=0,k=l-1$，得

推论 1 给定 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个实数 $0<s_{ij}\leqslant\pi(1\leqslant i<j\leqslant k)$，令 $s_{ij}=s_{ji},s_{ii}=0$，则球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中存在 k 个点 $e_i(i=1,2,\cdots,k)$，使任意两点 e_i 与 e_j 间之球面距离为 s_{ij} 的充分必要条件是：$(k+2)\times(k+2)$ 阶方阵

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & & & & -\frac{1}{2} \\ \vdots & & -2\sin^2\frac{s_{ij}}{2} & & \vdots \\ 1 & & & & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant k) \tag{2.7}$$

的次特征值中至多 n 个为正,其余皆为零.

推论 1 是有限点集在球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中等长嵌入的一个充分必要条件,它的等价形式已早在[2]中得到.

参考文献:

[1] 吴文俊. 复合形在欧氏空间中的实现问题 I [J]. 数学学报, 1955, **5**: 505—522; 1957, **7**: 79—101; 1958, **8**: 79—94.

WU Wen-jun. *On the realization of complexes in Euclidean spaces* I [J]. Acta. Math. Sinica, 1955, **5**: 505—522; 1957, **7**: 79—101; 1958, **8**: 79—94. (in Chinese)

[2] BLUMENTHAL L M. *Theory and Applications of Distance Geometry* [M]. 2nd ed, New york, 1970.

[3] 杨世国. 单形的构造定理 [J]. 数学季刊, 1991, **6**(4): 102—103.

YANG Shi-guo. *Theorem on structure of a simplex* [J]. Chinese Quarterly Journal of Math., 1991, **6** (4): 102—103. (in Chinese)

[4] 张景中,杨 路. 有限点集在伪欧空间的等长嵌入 [J]. 数学学报, 1981, **24**: 481—487.

ZHANG Jing-zhong, YANG Lu. *Isometric embedding a finite set of points in Pseudo-Euclidean space* [J]. Acta. Math. Sinica, 1981, **24**: 481—487. (in Chinese)

[5] 杨 路,张景中. 预给二面角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件 [J]. 数学学报, 1983, **2**: 250—256.

YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *The sufficient and necessary condition for embedding a simplex with prescribed dihedral angles in E^n*[J]. Acta. Math. Sinica, 1983, **26**: 250—256. (in Chinese)

[6] 杨 路,张景中. 非欧双曲几何的若干度量问题 I-等角嵌入和度量方程 [J]. 中国科学技术大学学报(数学专辑),1983 年 5 月,123—134.

YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *Some metric problems for non-Euclidean hyperbolic geometry* I, *isogonal embedding and metric equation* [J]. J. China. Univ. Sci. Tech. (Issue of Mathematics), 1983, 123—134. (in Chinese)

[7] 张景中,杨 路,杨孝春. 初等图形在欧氏空间实现的问题 [J]. 中国科学 A 辑, 1992, **22**(9): 932—941.

ZHANG Jing-zhong, YANG Lu, YANG Xiao-chun. *The problem of embeeding elementary figurate in Euclidean space* [J]. Science in China (A series), 1992, **22**(9): 932—941.

[8] 杨世国. 预给二面角的单形在球面型空间 $S_{n,r}$ 的嵌入 [J]. 数学研究与评论, 1996, **16**(4): 557—560.

YANG Shi-guo. *Embedding a simplex with prescribed dihedral angles in spherical space $S_{n,r}$*[J]. J. Math. Res. & Expo., 1996, **16**(4): 557—560. (in Chinese)

[9] 王 庚,杨世国. 预给二面角的单形在 E^n 中的嵌入 [J]. 安徽师范大学学报, 1994, **17**(4): 11—16.

WANG Geng, YANG Shi-guo. *Embeeding a simplex with precribed dihedral angles in* E^n[J]. J. Anhui Normal University, 1994, **17**(4): 11—16. (in Chinese)
[10] ERIKSSON F. *The law of sines for tetrahedra and n-simplices* [J]. Geometriae Dedicata, 1978, **7**: 71—80.

The Problem for Embedding Elementary Figurates in Spherical Space

YANG Shi-guo
(Dept. of Math., Anhui Institute of Education, Hefei 230061, China)

Abstract: In this paper, we propose and solve the problem for embedding elementary figurates in spherical space: The metry between elements e_i *and* e_j *in* $\{e_1, e_2, \cdots, e_{l-1}, e_{l+1}, \cdots, e_N\}$ (e_i is a point or a super-plane) is given. What is sufficient and necessary condition for embedding elementary figurate $\{e_1, \cdots, e_{l-1}, e_{l+1}, \cdots, e_{l+m}\}$ in spherical space?
Key words: elementary figurate; spherical space; secondary eigenvalue; embedding.