第22卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 22 No. 1
2002年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 2002

关于Minkowski空间的子流形*

聂　智
(重庆师范高等专科学校数学系，重庆 永川 402168)

摘　要：利用Finsler法曲率A、Landsberg曲率Ly、法切曲率Fy、Berwald联络D以及第二基本形式I_y，研究Minkowski空间中的子流形、子流形的旗曲率与李齐曲率.

关键词：Minkowski空间；旗曲率；第二基本形式.
分类号：AMS(2000) 53C/CLC O186
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0096-07

0 引 言

Finsler流形(M,F)具有齐性的二变量内积$g_{(x,y)}, g_{(x,\lambda y)} = (FF_{y^i y^j} + F_{y^i}F_{y^j})\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$，$\lambda \neq 0, y \in T_xM - \{0\}$，Landsberg空间、Berwald空间和Minkowski空间都是非Riemann的特殊Finsler流形. 常旗曲率作为Finsler流形的一个基本问题，Shen Zhong-min 和 H. Akbar 以及 MO Xiao-huan 先生分别在[3]，[5]，[6]中作出了研究，而对于Finsler流行中的子流形，Shen Zhog-min于98年6月在中国访问演讲中给出了一些思想、得到了一些结果. 本文在一种旗曲率为零的Finsler流形即Minkowski空间(V,F)中，应用Finsler法曲率、Landsberg曲率、法切曲率、Berwald联络和第二基本形式，对子流形和子流形的旗曲率、李齐曲率作出了一些研究，给出了子流形成为Einstein空间和Minkowski空间的条件，估计了子流形旗曲率与李齐曲率的存在范围. 文中$i,j,k,l = 1,2,\cdots n; a,b,c,d,m = 1,2,\cdots n+p$，有关知识参见[1]，[2]，[3]，[4].

1 准备工作

设(M,F)是$n+p$维Finsler流形，$f:(\overline{M},\overline{F}) \to (M,F)$是$n$维Finsler子流形(其中$\overline{F} = f^*F$)，$\forall\, x \in \overline{M}, x = f(x), T_x\overline{M} := f_*(T_{\bar{x}}\overline{M}) \subset T_xM$，在此将$\overline{M}$与$f(\overline{M}) \subset M$等同看待. 设$r:[-h,h] \to (\overline{M},\overline{F})$是测地线，$y = \dot{r}(0), r(t) = f\circ r(t), r(0) = x, F(\dot{r}) = F(\dot{r}) =$常数，取$TM - \{O\}$上标准局部坐标系$(x^a, y^a)$.

---

* 收稿日期：1999-03-15
作者简介：聂　智(1963-)，男，重庆江津人，副教授.

定义 1.1 $K(t):=\frac{1}{F^2(x)}\{\ddot{x}^a+2G^a(\dot{x})\}\frac{\partial}{\partial x^a}|_{r(t)}$，其中

$$G^a(y):=\frac{1}{4}g^{ab}(y)\left[\frac{\partial^2(F^2)}{\partial y^b\partial x^c}(y)y^c-\frac{\partial(F^2)}{\partial x^b}(y)\right],\tag{1}$$

$A:T_x\overline{M}\to T_xM, A(y):=F^2(y)K(0)$，则称 $K(t)$ 是 r 在 $r(t)$ 的测地曲率，A 是子流形 f 在点 x 的法曲率.

参照[4]用测地线的第一变分公式计算得：

引理 1.1

$$g_y(A(y),w)=0,\ \forall\ 0\neq y\in T_x\overline{M},\ \forall\ W\in T_x\overline{M}.\tag{2}$$

定义 1.2 若 $y\in T_xM-\{0\}$，定义一个对称多线性形式 $Ly:Ly(u,v,w)=L_{abc}(y)u^av^bw^c=\frac{1}{2}y^mg_{md}(y)\frac{\partial^3G^d(y)}{\partial y^a\partial y^b\partial y^c}u^av^bw^c$，易见 $L_y(y,\cdot,\cdot)=0$，则称 L 为 (M,F) 的 Landsberg 曲率；若 $L=0$ 则称 F 为 Landsberg 度量(参[1])；通过 $g_y(L_y(u,v),w)=L_y(u,v,w)$ 又定义了对称线性映射 $L_y:T_xM\otimes T_xM\to T_xM$.

定义 1.3 若对任何 $0\neq y\in T_xM$ 定义一个映射 $D^y:T_xM\times C^\infty(TM)\to T_xM, D_u^yV=\{u(V^a(x))+V^b(x)\Gamma^a_{bc}(y)U^c\}\frac{\partial}{\partial x^a}|_x$，其中 $\Gamma^a_{bc}(y)=\frac{\partial^2G^a(y)}{\partial y^b\partial y^c}=\frac{\partial N^b_a}{\partial y^c}(y), N^b_a(y)=\frac{\partial G^a}{\partial y^b}(y)=\Gamma^a_{bc}y^c$. D^y 满足性质：

(i) $D_u^y(fV)=U(f)V+fD_u^yV$；

(ii) $D_u^y(V_1+V_2)=D_u^yV_1+D_u^yV_2$；

(iii) $D_{tu}^yV=tD_u^yV$；

(iv) $D^y_{u_1+u_2}V=D^y_{u_1}V+D^y_{u_2}V$，

则映射族 $D=\{D^y:y\in T_xM-\{0\}\}$ 称为 Berwald 联络. 若由 $\nabla_u^yV=D_u^yV+Ly(U,V_x)$ 定义一映射 $\nabla^y:T_xM\times C^\infty(TM)\to T_xM$，则 $\nabla=\{\nabla^y:y\in T_xM-\{o\}\}$，正好是 Chern 联络. (参[8],[2].)

由(1) 和 $C_y(y,\cdot,\cdot)=0$ 以及对 y 分量的微分、F 的齐性得到与[1],[2],[3] 中一致的结果：$L_{dmc}=\frac{1}{2}\{\frac{\partial g_{dm}}{\partial x^c}-g_{da}\Gamma^a_{mc}-g_{ma}\Gamma^a_{dc}-2C_{mad}N^a_c\}$ 即：

引理 1.2 若对任 $U,V,Y\in C^\infty(TM), w、y=Y_x\in T_xM$，则

$$W[g_y(U,V)]=g_y(D_w^yU,V)+g_y(U,D_w^yV)+2C_y(U,V,D_w^yy)+2Ly(U,V,W)\tag{3}$$

其中 y-Cartan 张量 $C_y(U,V,W):=\frac{1}{4}F(x,y)\frac{\partial^3F^2}{\partial y^a\partial y^b\partial y^c}U^aV^bW^c=\frac{1}{2}F(x,y)\frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c}(x,y)U^aV^bW^c, C_y(y,\cdot,\cdot,)=0, C_{abc}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c}$.

定义 1.4 设 $f:(\overline{M},\overline{F})\to(M,F)$ 是 Finsler 子流形，$D_y:=D_y^y$ 与 $\overline{D}_y:=\overline{D}_y^y$ 分别表示 F 和 $\overline{F}$ 的 Berwald 联络，对 $y\in T_x\overline{M}-\{0\}$ 定义 $F_y:T_x\overline{M}\otimes T_x\overline{M}\to R$ 为 $F_y(u,v):=g_{\bar{y}}(\overline{D}_{\bar{y}}\overline{U},v)-g_y(D_yU,v), u=f_*(u), v=f_*(v), y=f_*(y), U=f_*(\overline{U}), U_x=u$. 则称 F_y 为子流形 f 的法切曲率.

定义 1.5 设 $y\in T_xM-\{0\}$，定义一个对称双线性映射 $\mathrm{I}_y:T_x\overline{M}\otimes T_x\overline{M}\to T_xM$，

$$\mathrm{I}_y(u,v):=\frac{1}{2}\frac{\partial^2A^a(y+su+tv)}{\partial S\partial t}\frac{\partial}{\partial x^a}|_x|_{s=t=0}=\frac{1}{2}u^iv^j\frac{\partial^2A^a}{\partial y^i\partial y^j}(y)\frac{\partial}{\partial x^a}|_x,$$

其中 $u = f_*(\overline{u}), v = f_*(\overline{v}) \in T_x\overline{M}, A(y) = A^a(y)\frac{\partial}{\partial x^a}$. 则称 II 是子流形 $f:(\overline{M},\overline{F}) \to (M,F)$ 的第二基本形式.

引理 1.3 若 $f:(\overline{M},\overline{F}) \to (M,F)$ 是 Finsler 子流形,则 f 的第二基本形式满足:

$$\mathrm{II}_y(y,y) = A(y), \tag{4}$$

$$\mathrm{II}_y(u,v) = D_u^y V|_x - f_*(\overline{D}_{\overline{u}}^{\overline{y}}\overline{V}), \tag{5}$$

其中 $u = f_*(\overline{u}), v = f_*(\overline{v}), y = f_*(\overline{y}) \in T_x\overline{M}, V_x = v$.

证明 首先由 F 的齐性知 $A^a(t\overline{y}) = t^2A^a(\overline{y}), \forall t > 0$,从而(4)成立.

再知 $A^a(y) = \frac{\partial^2 f^a}{\partial x^i \partial y^j}y^i y^j - 2\overline{G}^i(y)\frac{\partial f^a}{\partial x^i} + 2G^a(y)$ 是 $A(y)$ 的局部表示,此式两边对 y^i 微分后又对 y^j 微分得:

$$\mathrm{II}_y(u,v) = \{\frac{\partial^2 f^a}{\partial x^i \partial x^j}u^i v^j - \frac{\partial f^a}{\partial x^k}\overline{\Gamma}^k_{ij}u^i v^j + \Gamma^a_{bc}(y)u^b v^c\}\frac{\partial}{\partial x^a}|_x,$$

这正是(5)右边的局部表示. □

引理 1.4 若 $f:(\overline{M},\overline{F}) \to (M,F)$ 是 Finsler 子流形,$\overline{L}$ 与 L 分别是 $\overline{F}$ 与 F 的 Landsberg 曲率,且 $\overline{R}_{\overline{y}}$ 与 R_y 分别是 $\overline{F}$ 与 F 的 y 一旗曲率,

$$\overline{R}_{\overline{y}}(\overline{v}) = y^k\{\frac{\delta \overline{N}^i_k}{\delta x^j} - \frac{\delta \overline{N}^i_j}{\delta x^k}\}v^j\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\overline{x}}, R_y(v) = y^c\{\frac{\delta N^a_c}{\delta x^b} - \frac{\delta N^a_b}{\delta x^c}\}v^b\frac{\partial}{\partial x^a}|_x,$$

则

$$F_y(v,w) = C_y(A(y),v,w), \tag{6}$$

$$g_y(\mathrm{II}_y(u,v),y) = F_y(u,v) = -g_y(\mathrm{II}_y(y,u),v), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} g_{\overline{y}}(\overline{R}_{\overline{y}}(\overline{v}),\overline{v}) = {} & g_y(R_y(v),v) + 2L_y(v,v,A(y)) + E_y(v,v) + g_y(\mathrm{II}_y(y,y), \\ & \mathrm{II}_y(v,v)) - g_y(\mathrm{II}_y(y,v),\mathrm{II}_y(y,v)), \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $E_y(v,v) = Y[F_y(v,v)] - F_y(f_*(\overline{D}_{\overline{y}}\overline{V}),v) - F_y(v,f_*(\overline{D}_{\overline{y}}\overline{V})), \overline{y}$ 是 $\overline{M}$ 上测地向量场, $u = f_*(\overline{u}), w = f_*(\overline{w}), Y_x = y = f_*(\overline{y}), V_x = v = f_*(\overline{v}) \in T_xM$.

证明 由(3)与(5)可得

$$\begin{aligned} f_*(\overline{L}_{\overline{y}}(\overline{u},\overline{v},\overline{w})) = {} & L_y(u,v,w) + g_y(\mathrm{II}_y(u,v),w) + C_y(\mathrm{II}_y(y,u),v,w) + \\ & C_y(u,\mathrm{II}_y(y,v),w) - C_y(u,v,\mathrm{II}_y(y,w)). \end{aligned} \tag{9}$$

由于 $F_y(u,v) = -g_y(\mathrm{II}_y(y,u),v)$,并将 $u = y$ 代入(9)得(6).

由于 $w = y$ 代入(9)可得

$$g_y(\mathrm{II}_y(u,v),y) = C_y(u,v,A(y)). \tag{10}$$

由(6)与(10)以及 C_y 的对称性得(7),将 $E_y(v,v)$ 以及 $R_y(v), \overline{R}_{\overline{y}}(\overline{v})$ 代入(8),用 D 与 II 可知成立.

2 主要结果及其证明

定义 2.1 若 $f:(\overline{M},\overline{F}) \to (V,F)$ 是 Minkowski 空间中的子流形,则:

(1) 当 $A = 0$ 时称 f 是全测地子流形;

(2) 当 $\mathrm{II}_y(e_i,e_i) = \mathrm{II}_y(e_j,e_j), \forall\, y \in T_x\overline{M} - \{0\}, \forall\, \overline{x} \in \overline{M}, \{ei\}$ 是关于 g_y 的 $T_x\overline{M}$ 的标正基. 称 f 是 Finsler-Riemann 全脐子流形；

(3) $H_y = \frac{1}{n}\sum_i \mathrm{II}_y(e_i,e_i)$ 称为 f 的 y-Riemann 平均曲率. 如果 $\forall\, \overline{x} \in \overline{M}, \forall\, y \in T_x\overline{M} - \{0\}$, 有 $H_y = 0$, 则称 f 是 y-Riemann 极小子流形；

(4) $\| \mathrm{II}_y \|^2 := \sum_{ij} g_y(\mathrm{II}_y(e_i,e_j), \mathrm{II}_y(\mathrm{II}_y(e_i,e_j)) = \sum_{i,j,k}(\mathrm{II}^{\,y}_{\,ij})^2$,

$$\| \mathrm{II} \|^2 := \sup\{\| \mathrm{II}_y \|^2 : \forall\, y \in T\overline{M}\},$$

其中 $\forall\, y \in T\overline{M} \subset V$, 取 $e_1 = \frac{y}{F(y)}, Y_x = y$, 关于 g_y 有标准正交标架场 $\{e_i\}$；

(5) 李齐曲率 $\overline{R}_ic(y) := \sum_i \overline{g}_{\overline{y}}(\overline{R}_{\overline{y}}(\overline{e}_i), \overline{e}_i)$.

定理 2.1 若 $f:(\overline{M},\overline{F}) \to (V,F)$ 是 Minkowski 空间的全测地闭子流形，则 $(\overline{M},\overline{F})$ 是局部 Minkowski 空间.

证明 先不妨取任一旗 $\{x,y,y \wedge v\}$, 其中 y 与 v 关于 $g_{\overline{y}}$ 标准正交，则有 $\overline{K}(y,v) = g_{\overline{y}}(\overline{R}_{\overline{y}}(v),v)$；由于 Minkowski 空间的旗曲率为 0, 即 $K(y,v) = g_y(R_y(v),v) = 0$, 从而由(8)得

$$\overline{K}(y,v), = 2L_y(v,v,A(y)) + E_y(v,v) + g_y(\mathrm{II}_y(y,y), \mathrm{II}_y(v,v)) - g_y(\mathrm{II}_y(y,v), \mathrm{II}_y(y,v)).$$

再由 $A=0$ 即 $A^a = 0$ 得：$\mathrm{II}_y = 0$, 由(6)得 $F_y = 0$, 从而 $E_y = 0$, 得 $\overline{K}(y,v) = 0$, 又因为 f 是闭子流形，所以由文献[5]知 f 是局部 Minkowki 空间.

定理 2.2 若 $f:(\overline{M}^n,\overline{F}) \to (V^{n+p},F)$ 是 Minkowski 空间中的 y-Riemann 极小子流形，并且 $\sum_{i,b}(\mathrm{II}^{\,b}_{\,11i})^2 = -\frac{(n-1)\lambda}{3}$, λ 是常数. 则 $\overline{R}ic(\overline{y}) = (n-1)\lambda\overline{F}^2(\overline{y}), \forall\, \overline{y} \in T_x\overline{M}$. 即 f 是 Einstein 空间.

证明 首先由 Minkowski 空间中的 $G^a = 0$, 从而 $L_y = 0$, 且旗曲率 $K = 0$, 故由(8)得：

$$\overline{R}ic(y) = \sum_i E_y(e_i,e_i) + \sum_i \{g_y(\mathrm{II}_y(y,y), \mathrm{II}_y(e_i,e_i)) - g_y(\mathrm{II}_y(y,e_i), \mathrm{II}_y(y,e_i))\}$$

其次由于 Minkowski 空间中 $\Gamma^a_{bc} = O$, 从而 $f_*(\overline{D}_{\overline{y}}\,\overline{e}_i) = -\mathrm{II}_y(y,e_i)$, 其中 $\overline{e}_1 = \frac{\overline{y}}{\overline{F}(\overline{y})}$, $\{\overline{e}_i\}$ 关于 $g_{\overline{y}}$ 是标准正交场，$\overline{Y}_{\overline{x}} = \overline{y}$. 用(7)式有：

$$\begin{aligned} E_y(e_i,e_i) &= y(F_y(e_i,e_i)) + F_y(\mathrm{II}_y(y,e_i),e_i) + F_y(e_i, \mathrm{II}_y(y,e_i)) \\ &= Y(F_y(e_i,e_i)) - 2g_y(\mathrm{II}_y(y,e_i), \mathrm{II}_y(y,e_i)), \\ Y(F_y(e_i,e_i)) &= Y(g_y(\mathrm{II}_y(e_i,e_i),y)) \\ &= g_y(D^Y_y \mathrm{II}_y(e_i,e_i),y) + g_y(\mathrm{II}_y(e_i,e_i),D^Y_yY) + \\ &\quad 2C_y(\mathrm{II}_y(e_i,e_i),y,D^Y_yY) + 2L_y(\mathrm{II}_y(e_i,e_i),y,y). \end{aligned}$$

由于 Mindowski 空间中 $L_y = 0$, 又 $C_y(\cdot,y,\cdot) = 0$, 而 E_y 中的 $\overline{Y}$ 是 $(\overline{M},\overline{F})$ 上测地场，即 $\overline{D}^{\overline{Y}}_{\overline{y}}\overline{Y} = 0$, 从而：$Y(F_y(e_i,e_i)) = g_y(D^Y_y(e_i,e_i),y) + g_y(\mathrm{II}_y(e_i,e_i), \mathrm{II}_y(y,y))$. 由 $\Gamma^a_{bc} = 0$, 以及上面各式有：

$$\overline{R}ic(\overline{y}) = g_y(y^a\frac{\partial}{\partial x^a}\sum_i \mathrm{II}_y(e_i,e_i),y) + 2g_y(\mathrm{II}_y(y,y), \sum_i \mathrm{II}_y(e_i,e_i)) -$$

$$3\sum_i g_y(\mathrm{I}_y(y,e_i),\ \mathrm{I}_y(y,e_i)).$$

最后 $H_y=0$,得

$$\overline{Ric}(y)=-3\sum_i g_y(\mathrm{I}_y(y,e_i),\ \mathrm{I}_y(y,e_i))=-3\sum_i \mathrm{I}^a_{11i}\mathrm{I}^b_{11i}g_y(\frac{\partial}{\partial x^a},\frac{\partial}{\partial x^b})F^2(y).$$

由文[3]知 Minkowski 空间中 $\frac{\partial}{\partial x^a}=e_a$,而 $\overline{F}(y)=f^*F(y)=F(y)$,所以

$$\overline{Ric}(y)=-3\sum_{i,b}(\mathrm{I}^b_{11i})^2\overline{F}^2(y)=(n-1)\lambda\overline{F}^2(y).$$

推论 若 $f:(\overline{M},\overline{F})\to(V,F)$ 是 Minkowski 空间中的 y − Riemann 极小子流形,则 $\overline{Ric}(y)\leqslant 0,\forall\ x\in\overline{M},\forall\ y\in T_x\overline{M}$.

定理 2.3 若 $f:(\overline{M}^2,\overline{F})\to(V,F)$ 是 Minkowski 空间中的二维闭子流形,对任 $x\in\overline{M}$,在 (V,F) 中存在一条测地线 γ,使 $x=\gamma(0)=f\overline{\gamma}(0),\overline{\gamma}(t)\subset\overline{M},\forall\ t,T_{\gamma(t)}\overline{M}$ 在 (V,F) 中沿 γ 平行,则 $(\overline{M}^2,\overline{F})$ 是局部的 Minkowki 空间.

证明 首先任取一个旗 $\{x,\overline{Y},\overline{Y}\wedge\overline{V}\}$,由 $\dim\overline{M}=2$ 有 $T_x\overline{M}=\mathrm{span}\{\overline{Y},\overline{V}\}$,从而可取 $\overline{X}(t)$ 是沿 γ 关于 $g_{\dot\gamma}$ 与 $\dot{\overline{\gamma}}$ 正交的单位向量场,且 $T_x\overline{M}=\mathrm{Span}\{\overline{X}(0),\ \dot{\overline{\gamma}}(0)\}$,可知 $\overline{K}(\overline{Y},\overline{V})=\overline{K}(\overline{X}(0),\dot{\overline{\gamma}}(0))$. 其次由于 Minkowski 空间中 $K=0,G^a=0$,从而 $L_{\dot\gamma}=0$,由(8)得:$\overline{K}(\mathrm{y},\mathrm{v})=E_{\dot\gamma}(X(t),X(t))+g_{\dot\gamma}(\mathrm{I}_{\dot\gamma}(\dot\gamma,\dot\gamma),\ \mathrm{I}_{\dot\gamma}(\dot\gamma,\dot\gamma))-g_{\dot\gamma}(\mathrm{I}_{\dot\gamma}(\dot\gamma,X),\ \mathrm{I}_{\dot\gamma}(\dot\gamma,X))$ 由 γ 是 (V,F) 中的测地线即 $D_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$ 知:$A(\dot\gamma)=\mathrm{I}_{\dot\gamma}(\dot\gamma,\dot\gamma)=-f_*(\overline{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma)$,又由(2)知 $g_{\dot\gamma}(A(\dot\gamma),f_*(\overline{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma))=0$,得 $A(\dot\gamma)=0$. 所以 $\overline{K}(\overline{Y},\overline{V})=E_{\dot\gamma}(X,X)-g_{\dot\gamma}(\mathrm{I}_{\dot\gamma}(\dot\gamma,X),\mathrm{I}_{\dot\gamma}(\dot\gamma,X))$.

再由 $T_{\gamma(t)}\overline{M}$ 在 (V,F) 中沿 γ 平行知 $D_{\dot\gamma}f_*(X)=0,D_{\dot\gamma}\dot\gamma=0,\forall\ t$,由 $g_{\dot\gamma}(\overline{X},\overline{X})=1$ 得

$$\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}(g_{\dot{\overline{\gamma}}}(\overline{X},\overline{X}))=2g_{\dot{\overline{\gamma}}}(\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}\overline{X},\overline{X})+2C_{\dot{\overline{\gamma}}}(\overline{X},\overline{X},\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}\dot{\overline{\gamma}})+2L_{\dot{\overline{\gamma}}}(\overline{X},\overline{X},\dot{\overline{\gamma}}).$$

由 $A(\dot\gamma)=0$ 知 $\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}\dot{\overline{\gamma}}=0$,又 $L_{\dot\gamma}(\overline{\gamma},\cdot,\cdot)=0$,所以有:$g_{\dot{\overline{\gamma}}}(\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}\overline{X},\overline{X})=0$ 同理由 $\overline{g}_{\dot{\overline{\gamma}}}(\overline{X},\dot{\overline{\gamma}})=0,\overline{g}_{\dot{\overline{\gamma}}}(\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}\overline{X},\dot{\overline{\gamma}})=0$,又 $\dim\overline{M}=2$,所以 $\overline{D}_{\dot\gamma}\overline{X}=0,\forall\ t$,从而得:

$$\mathrm{I}_{\dot\gamma}(\dot\gamma,X)=D_{\dot\gamma}f_*(\overline{X})-f_*(\overline{D}_{\dot\gamma}\overline{X})=0,$$

故

$$\begin{aligned}\overline{K}(\overline{Y},\overline{V})&=E_{\dot\gamma}(X,X)\\&=\dot\gamma(F_{\dot\gamma}(X,X))-F_{\dot{\overline{\gamma}}}(f_*(\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}\overline{X}),X)-F_{\dot{\overline{\gamma}}}(X,f_*(\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}\overline{X}))\\&=\dot\gamma(\overline{g}_{\dot\gamma}(\overline{D}_{\dot{\overline{\gamma}}}\overline{X},\overline{X})-g_{\dot\gamma}(D_{\dot\gamma}X,X))\\&=0.\end{aligned}$$

又知 f 是闭子流形,从而由文[5]知 $(\overline{M},\overline{F})$ 是局部的 Minkowski 空间. 证毕.

定理 2.4 若 $f:(\overline{M},\overline{F})\to(V,F)$ 是 Minkowski 空间中的子流形,$\|\mathrm{I}\|^2\leqslant h$(常数),并且 f 是 Finsler-Riemann 全脐的子流形,则 $-\frac{5}{2}h\leqslant\overline{K}\leqslant\frac{1}{2}h$.

证明 首先不妨取任一旗 $\{x,\overline{Y},\overline{Y}\wedge\overline{V}\}$,其中 $e_1=\frac{\overline{Y}}{\overline{F}(\overline{Y})},e_i=\frac{\overline{V}}{\overline{F}(\overline{V})},\overline{Y}_{\bar x}=y,\overline{V}_{\bar x}=\bar v$,$\{e_i\}$ 是关于 g_y 的标准正交向量场,则 $\overline{K}(y,v)=g_{\bar e_1}(\overline{R}_{\bar e_1}(e_i),e_i)|_x$. 由于 Minkowsi 空间中 $G^a=0,K=0,L_y=0$,则由(8)有 $\overline{K}(\overline{Y},\overline{V})=E_{e_1}(e_i,e_i)+g_{e_1}(\mathrm{I}_{e_1}(e_1,e_1),\mathrm{I}_{e_1}(e_i,e_i))-$

$g_{e_1}(\mathrm{I}_{e1}(e_1,e_i),\mathrm{I}_{e1}(e_1,e_i))$. 由于Minkowski空间中$e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$(文[3])有$\overline{K}(y,v)=E_{e_1}(e_i,e_i)+\sum_b(\mathrm{I}^b_{111}\mathrm{I}^b_{1ii}-(\mathrm{I}^b_{11i})^2)$，其次

$$\sum_b(\mathrm{I}^b_{111}\mathrm{I}^b_{1ii}-(\mathrm{I}^b_{11i})^2)\leqslant\frac{1}{2}\sum_b((\mathrm{I}^b_{111})^2+(\mathrm{I}^b_{1ii})^2)\leqslant\frac{1}{2}h$$

$$\sum_b(\mathrm{I}^b_{111}\mathrm{I}^b_{1ii}-(\mathrm{I}^b_{11i})^2)\geqslant-\frac{1}{2}\sum_b((\mathrm{I}^b_{111})^2+(\mathrm{I}^b_{1ii})^2+2(\mathrm{I}^b_{11i})^2)$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\sum_{b,j,i}(\mathrm{I}^b_{1ji})^2\geqslant-\frac{1}{2}h.$$

从而$E_{e_1}(e_i,e_i)-\frac{1}{2}h\leqslant\overline{K}(y,v)\leqslant E_{e_1}(e_i,e_i)+\frac{1}{2}h$.

再由于f是Finsler－Riemann全脐的，有$\mathrm{I}_{e_1}(e_i,e_i)=\mathrm{I}_{e_1}(e_1,e_1)=A(e_1),e_1=f_*(\overline{e}_1)$，由(7)与(2)式得：

$$e_1(F_{e_1}(e_i,e_i))=e_1(g_{e_1}(A(e_1),e_1))=0.$$

从而

$$\begin{aligned}E_{e_1}(e_i,e_i)&=-F_{e_1}(f_*(\overline{D}_{e_1}\overline{e}_i),e_i)-F_{e_1}(e_i,f_*(\overline{D}_{e_1}\overline{e}_i))\\&=F_{e_1}(\mathrm{I}_{e_1}(e_1,e_i),e_i)+F_{e_1}(e_i,\mathrm{I}_{e_1}(e_1,e_i))\\&=-2g_{e_1}(\mathrm{I}_{e_1}(e_1,e_i),\mathrm{I}_{e_1}(e_1,e_i))\\&=-2\sum_b(\mathrm{I}^b_{11i})^2,\end{aligned}$$

有$-2h\leqslant E_{e_1}(e_i,e_i)\leqslant0$，故$-2h-\frac{1}{2}h\leqslant\overline{K}(y,v)\leqslant\frac{1}{2}h$. 证毕.

类似地有：

定理 2.5 若$f:(\overline{M},\overline{F})\rightarrow(V,F)$是Minkowski空间中的子流形，$\|\mathrm{I}\|^2\leqslant h$(常数)，$C_y=0,\forall Y\in T_x\overline{M},\forall x\in\overline{M}$，则：$-\frac{1}{2}h\leqslant\overline{K}\leqslant\frac{1}{2}h$.

定理 2.6 若$f:(\overline{M}^2,\overline{F})\rightarrow(V,F)$是Minkowski空间中的2维y-Riemann极小子流形，$\|\mathrm{I}\|^2\leqslant h$(常数)，则$-3h\leqslant\overline{K}\leqslant0$.

参考文献：

[1] ANTONELLI P, INGARDEN R, MATSUMOTO M. *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology* [M]. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[2] DAVID B, CHERN S S. *On a notable connection in Finsler Geometry* [J]. Houston Journal of Mathematics, 1993, **19**(1): 139－182.

[3] SHEN Zhong-ming. *Finsler manifolds of constant positive curvature* [J]. Contemporary Math, 1996, **196**: 83－92.

[4] SHEN Zhong-ming. *On Finsler Geometry of submanifolds* [J]. Mathematische Annalen, 1998, 1－30.

[5] ZADEH H A. *Sur les espaces de Finsler a courbures Sectionnelles Constantes* [J]. Bull Acad. Roy. Bel. Bull. Cl. Sci., 1988, **74**(5): 281－322.

[6] MO Xiao-huan. *Characterization and structure of finsler spaces with CFC* [M]. Chinese Science(英),

1998.
[7] CHEN B Y. *Geometry of Submanifolds* [M]. Marcel Dekker, 1973.
[8] BERWALD L. *Untersuchung der Krummmung allgemeiner metrischer Raume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus* [J]. Math, Z., 1926, **25**: 40—73.

On Submanifolds of Minkowski Space

NIE Zhi
(Dept of Math., Chongqing Teachers' College, Yongchuan 402168, China)

Abstract: Submanifolds flag curvature and Ricci curvature of submanifolds is studied by using normal curvature, Landsberg Curvature, normal tangent Curvature, Berwald connection, and second fundamenal form in Minkowski space.
Key words: Minkowski space; flag curvature; second fundamental form.