第22卷第1期　　　　数学研究与评论　　　　Vol. 22 No. 1
2002年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 2002

# 二元尺度函数的正交性*

周先波[1]，　陈文胜[2]

(1. 中山大学岭南学院，广东 广州 510275；2. 深圳大学理学院，广东 深圳 518060)

**摘　要**：本文从非诱导的二维正交滤波的一类零点出发，构造紧集 $K$，利用 Cohen 准则，得到非诱导滤波对应的 $(A,h)$ 尺度函数正交的一个充分条件，并构造二维正交滤波的例子说明其应用.

**关键词**：尺度函数；Cohen 准则；正交性；非诱导滤波.

**分类号**：AMS(2000) 42C05/CLC O174.2，O177.6

**文献标识码**：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0113-05

## 1 引　言

尺度方程解的整数平移的正交性问题在正交小波构造中有着关键的作用. 在多尺度分析(MRA)的框架下，紧支正交小波可由正交尺度函数的有限线性组合而得，而组合的系数由尺度方程中的尺度系数或面具而定. 这些系数决定分解和重构滤波的快速小波变换，包含 MRA 的所有信息. 所以，构造紧支正交小波基的出发点就是这些系数和相应的尺度方程[1,5]. 但滤波系数满足正交条件不一定得到正交的尺度函数，在一维情形下，[2]给出一个极好的反例：滤波 $m(\omega)=(1+e^{-3i\omega})/2$. 在二维情形下，人们作出的最简单的二维正交滤波是由一维正交滤波诱导而得，即 $M(\omega_1,\omega_2)=m(\omega_1)$[1,4]；文[3]和[5]构造出较为复杂的二维滤波. 文[4]考虑多元尺度函数的稳定性和正交性，但正交性的讨论仅适用于二维诱导滤波，其出发点是二维诱导滤波的平凡零点. 二维非诱导滤波在什么条件下生成正交的尺度函数较少受到人们的关注. 本文考虑二维非诱导的滤波函数 $H(\omega_2,\omega_2)$，从它的一类特殊零点出发，构造紧集 $K$，利用 Cohen 准则，证明 $H$ 生成正交尺度函数的一个充分条件，并用文[5]方法构造二维非诱导滤波，举例说明其应用.

## 2 二维滤波的正交条件与 Cohen 准则

设 $A$ 是 $2\times2$ 整数矩阵，$|\det A|=2$，且其特征值 $\lambda$ 满足 $|\lambda|>1$. $(A,h)$ 尺度函数 $\varphi(x)$ 满足尺度方程

* 收稿日期：1999-05-27
基金项目：国家自然科学基金资助项目(79800014)
作者简介：周先波(1965- )，男，博士，副教授.

$$\varphi(x)=2\sum_{k\in Z^2}h_k\varphi(Ax-k),\tag{1}$$

其中 $x=(x_1,x_2)^t\in R^2, k=(k_1,k_2)^t\in Z^2, h=\{h_k\}_{k\in Z^2}$ 为尺度系数或面具,尺度系数列 $h$ 的 Fourier 变换 $H(\omega)=\sum_{k\in Z^2}h_ke^{-ik\omega}$,称为对应于 $h$ 的滤波函数或符号,这里 $\omega=(\omega_1,\omega_2)^t\in R^2, k\omega=k_1\omega_1+k_2\omega_2$. 对(1)两端取 Fourier 变换得

$$\hat{\varphi}(\omega)=\prod_{j>0}H((A^{-t})^j\omega),\tag{2}$$

这里 $\hat{\varphi}(0)=\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$. 假定 $h=\{h_k\}$ 为有限紧支序列,满足 $\sum_{k\in Z^2}h_k=1$,则方程(1)存在唯一的紧支$(A,h)$尺度函数解,且Fourier变换具有无穷乘积表示式(2)[6]. 如果$\{\varphi(\cdot-k)\}_{k\in Z^2}$是其生成的平移不变子空间的正交基,则称$(A,h)$尺度函数 $\varphi$ 是正交的.

**引理 2.1**[7] 设 $\varphi$ 为正交的$(A,h)$尺度函数,则滤波 $H$ 满足

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+2\pi A^{-t}z)|^2=1,\ H(0)=1,\tag{3}$$

其中 $z\in Z^2/A^tZ^2$,且 $z\neq0$.

设 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$,在(3)中,取 $z=(0,1)^t\in Z^2/A^tZ^2$,则有 $2\pi A^{-t}z=(\pi,\pi)^t$. 此时,二维滤波的正交条件为[1]

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+(\pi,\pi)^t|^2=1,\ H(0)=1.\tag{4}$$

满足(4)的滤波称为正交滤波. 如果用滤波系数来表示正交条件,则(4)等价于[5]

$$\begin{cases}\sum h_k=1,\ \sum h_k^2=1/2,\\ \sum h_kh_{k-m}=0,\text{其中 } m=(m_1,m_2)^t\neq0, m_1+m_2\text{ 为偶数}.\end{cases}\tag{5}$$

**定义 2.2** 称滤波 $H(\omega)$ 满足 Cohen 准则,如果存在紧集 $K\subset R^2$,使(i) $K$ 包含原点的某个邻域; (ii) $|K|=4\pi^2$,且 $\forall\ \omega\in[-\pi,\pi]^2$, $\exists\ k\in Z^2$,使 $\omega+2k\pi\in K$; (iii) $\forall\ j\in N$, $H((A^{-t})^j\omega)$ 在 $K$ 上不为 0.

$K=[-\pi,\pi]^2$ 是平凡的,此时,(iii) 说明 $H$ 在集$\{\omega\in R^2: |\omega_1|+|\omega_2|\leqslant\pi\}$上不为 0,例如,对于滤波 $H_0(\omega)=[1+e^{i\omega_1}+e^{i\omega_2}+e^{-i(\omega_1+\omega_2)}]/4$,可取 $K=[-\pi,\pi]^2$,故它满足 Cohen 准则. 一般地,根据滤波的特点,选取不同的 $K$. 以下是由 Cohen 准则判断尺度函数正交性的定理[2,5]:

**引理 2.3** 设 $\varphi$ 由(2)决定,则$\{\varphi(\cdot-k)\}_{k\in Z^2}$是 $L^2(R^2)$ 的正交序列当且仅当 $H(\omega)$ 满足正交条件(5)及 Cohen 准则.

## 3 尺度函数的正交性

从滤波 $H(\omega)$ 的零点人手,假定 $H$ 的零点落在直线 $\omega_1-2\omega_2=(2n+1)\pi$ 上. 先给出下面的一个引理,它是无穷乘积表示式(2)的直接结果.

**引理 3.1** 设滤波 $H(\omega)$ 的零点集为 $Z_H$, $A$ 为 $2\times2$ 容许展度矩阵, $\varphi$ 为$(A,h)$尺度方程的唯一解,则 $\varphi$ 的 Fourier 变换的零点集 $Z_{\hat{\varphi}}$ 满足 $Z_{\hat{\varphi}}=\bigcup_{j>0}(A^t)^jZ_H$.

**引理 3.2** 对于矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，存在正常数 $c_1,c_2,c_1',c_2'$，使不等式 $c_1 2^{n/2}\|v\| \leqslant \|A^n v\| \leqslant c_2 2^{n/2}\|v\|$ 及 $c_1' 2^{-n/2}\|v\| \leqslant \|A^{-n}v\| \leqslant c_2' 2^{-n/2}\|v\|$ 成立，其中 $n\in N, v=(v_1,v_2)^t\in R^2, \|v\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$.

**证明** 利用 $A$ 的特征值的特殊性质和有限维线性空间中不同基下范数等价定理可证.

**注** 引理 3.1 表明，$\hat{\varphi}(\omega)$ 的零点为 $H(\omega)$ 的零点分别在 $A^t,(A^t)^2,\cdots$ 作用下的像点的并，而由引理 3.2，$A^t$ 作用有限次后，像点就落到了$[-\pi,\pi]^2$ 的外面. 定义 2.2 的条件(iii) 等价于 $\hat{\varphi}(\omega)$ 在 $K$ 上不为零，而由条件(ii)，若某滤波 $H(\omega)$ 在原点的某邻域 $U$ 内不为 0，就可以将$[-\pi,\pi]^2$ 中的上述像点"挖去"：将它们平移$(2\pi,0)^t$ 或$(0,2\pi)^t$ 的整数倍，构造紧集 $K$ 为$[-\pi,\pi]^2$ 中的余下部分与"挖去"点被平移到新位置所得点集的并集；若能验证每个 $H((A^{-t})^j\omega)$ 在 $K$ 上不为 0，则由引理 2.3，滤波 $H$ 可生成正交尺度函数. 由引理 3.2，最后一步的验证也只需有限次.

**引理 3.3** 设展度矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$H(\omega)$ 的零点满足

$$Z_H=\{(\omega_1,\omega_2)^t\in R^2:\omega_1-2\omega_2=(2n+1)\pi, n\in Z\}, \tag{6}$$

则它们在$(A^t)^j, j>0$ 的作用下，与$[-\pi,\pi]^2$ 仅交成四条线段.

**证明** 由引理 3.2，只须考虑 $n=0,-1$ 时的零点限制直线 $l_0,l_{-1}$，因为其它直线在 $A^t$ 作用下与$[-\pi,\pi]^2$ 不交. 下面是 $l_0,l_{-1}$ 在 $A^t$ 作用下与$[-\pi,\pi]^2$ 交的情况：

$$l_0:\begin{matrix}y=x/2-\pi/2\\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\end{matrix}\xrightarrow{A^t} a:\begin{matrix}y=-x/3-2\pi/3\\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\end{matrix}\xrightarrow{A^t} c:\begin{matrix}y=-2x-2\pi\\ -\pi\leqslant x\leqslant-\pi/2\end{matrix}\xrightarrow{A^t}\begin{matrix}x=-\pi\\ y=\pi\end{matrix}$$

$$l_{-1}:\begin{matrix}y=x/2+\pi/2\\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\end{matrix}\xrightarrow{A^t} b:\begin{matrix}y=-x/3+2\pi/3\\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\end{matrix}\xrightarrow{A^t} d:\begin{matrix}y=-2x+2\pi\\ \pi/2\leqslant x\leqslant\pi\end{matrix}\xrightarrow{A^t}\begin{matrix}x=\pi\\ y=-\pi\end{matrix}$$

$l_0,l_{-1}$被 $A^t$ 作用三次以上时，与$[-\pi,\pi]^2$ 无交，故 $Z_H$ 在$(A^t)^j, j>0$ 作用下与$[-\pi,\pi]^2$ 仅交成四条线段 $a,b,c,d$.

**定理 3.4** 设滤波系数 $h:=\{h_k\}_{k\in Z^2}$满足(3)，展度矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，滤波 $H(\omega)$的零点满足(6)，且$[-\pi,\pi]^2$ 中的点$(\pm\frac{3}{5}\pi,-\frac{1}{5}\pi)^t,(\pm\frac{1}{5}\pi,\frac{3}{5}\pi)^t,(\pm\frac{1}{5}\pi,-\frac{2}{5}\pi)^t$ 不为 $H(\omega)$的零点，则相应的$(A,h)$尺度函数是正交的，从而 $H$ 可生成紧支正交小波.

**证明** 对引理 3.3 证明中的四条线段 $a,b,c,d$ 分别作如下平移，

$$a\xrightarrow{\tau(0,2\pi)^t} a^1: y=-\frac{1}{3}x+\frac{4\pi}{3}, -\pi\leqslant x\leqslant\pi,$$

$$b\xrightarrow{\tau(0,-2\pi)^t} b^1: y=-\frac{1}{3}x-\frac{4\pi}{3}, -\pi\leqslant x\leqslant\pi,$$

$$c\xrightarrow{\tau(0,2\pi)^t} c^1: y=-2x, -\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$d\xrightarrow{\tau(0,-2\pi)^t} d^1: y=-2x, \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi.$$

用 $l_\epsilon$ 表示线段 $l$ 的充分小邻域与$[-\pi,\pi]^2$ 的交，$l_\epsilon^1$ 表示 $l_\epsilon$ 相应于上面的平移，构造紧集 $K$ 为

$$K=[-\pi,\pi]^2\backslash\{a_\epsilon\cup b_\epsilon\cup c_\epsilon\cup d_\epsilon\}\cup\{a_\epsilon^1\cup b_\epsilon^1\cup c_\epsilon^1\cup d_\epsilon^1\}\stackrel{\triangle}{=}K_0\cup K_1.$$

显然，$K$ 满足定义 2.2 中的(i)和(ii)，且在 $K_0$ 上，$H((A^{-t})^j\omega)\neq 0$. 为(iii)也被满足，只须验证在 $K_1$ 上 $H((A^{-t})^j\omega)$，$j>0$ 也不为零. 此时，$A^{-t}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. 经运算和图示可知，当 $a^1,b^1,c^1,d^1$ 在 $A^{-t}$作用四次以后，再继续作用 $A^{-t}$，线段全部落在 $l_0,l_{-1}$之间的以原点为心的一个邻域内，与零点限制直线 $l_0,l_{-1}$无交点. 在上述作用过程中，

$$(A^{-t})^2a^1\cap l_{-1}=(-\frac{3}{5}\pi,\frac{1}{5}\pi)^t=-(A^{-t})^2b^1\cap l_0,$$

$$\begin{aligned}(A^{-t})^3a^1\cap l_0&=(A^{-t})^3c^1\cap l_0=(-\frac{1}{5}\pi,-\frac{3}{5}\pi)^t\\&=-(A^{-t})^3b^1\cap l_{-1}=-(A^{-t})^2d^1\cap l_{-1},\end{aligned}$$

$$(A^{-t})^4a^1\cap l_0=(\frac{1}{5}\pi,-\frac{2}{5}\pi)^t=-(A^{-t})^4b^1\cap l_{-1}.$$

由条件，$H(\omega)$在这些点处不为零，而 $H(\omega)$是连续的，故可取 $\epsilon$ 充分小，使 $H(\omega)$在这些点的 $\epsilon$ 邻域内不为零. 上述过程说明，$\forall\ j>0$，$H((A^{-t})^j\omega)$在 $K_1$ 上不为零，应用引理 2.3，定理得证.

## 4　非诱导滤波的例子

本节给出两个例子，说明上节定理的应用. 为方便起见，将滤波 $H(\omega)=\sum\limits_{k\in Z^2}h_ke^{-ik\omega}$ 用其系数的矩阵表示[5].

**例 4.1**　设展度矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，滤波 $H(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{4}(1-z_1+z_1^2+z_1^3)+\frac{1}{4}z_2^2(-1+z_1+z_1^2+z_1^3)$，其中 $z_1=e^{-i\omega_1}$，$z_2=e^{-i\omega_2}$，$\omega=(\omega_1,\omega_2)^t\in R^2$，则 $H$ 可生成正交的尺度函数，从而生成 $L^2(R^2)$ 的正交小波基.

**证明**　先将 $H$ 用其系数矩阵表示：

$$h:=\{h_k\}_{0\le k_1,k_2\le 3}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

例如，$h_{(0,0)}=1$，$h_{(1,2)}=1$，$h_{(2,1)}=0$ 等. 首先，容易验证滤波系数满足正交条件(5)，故滤波 $H$ 为正交的. 其次证明 $H$ 生成正交小波. 注意到$(\omega_1,\omega_2)^t$ 为 $H$ 的零点的必要条件是

$$|1-z_1+z_1^2+z_1^3|^2=|-1+z_1+z_1^2+z_1^3|^2,$$

即 $\cos\omega_1=\cos 3\omega_1$，故零点$(\omega_1,\omega_2)^t$ 必须满足 $\omega_1=\frac{n\pi}{2}$ 或 $\omega_1=n\pi$，$n\in Z$. 当 $\omega_1\in[-\pi,\pi]$ 时，$\omega_1=\pm\pi,\pm\frac{\pi}{2},0$，将它们代入 $H$ 的表达式，求得 $H$ 在$[-\pi,\pi]^2$ 中的零点为

$$(\pi,\pm\pi),(-\pi,\pm\pi),(\pm\pi,0),(0,\pm\frac{\pi}{2}),(\pm\frac{\pi}{2},\mp\frac{\pi}{4}),(\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{4}).$$

可见它们落在直线 $\omega_1-2\omega_2=\pm\pi$，$\omega_1-2\omega_2=\pm 3\pi$ 上，而 $H(\omega_1,\omega_2)$ 是$(2\pi,\pi)$- 周期函数，故其零点满足 $\omega_1-2\omega_2=(2n+1)\pi$，定理 3.4 的条件被满足，从而滤波 $H$ 生成正交的$(A,h)$ 尺度函数.

**例 4.2** 设 $H_0(\omega_1) = d_0 + d_1 z_1 + d_2 z_1^2 + d_3 z_1^3$ 为 Daubechies 四系数滤波[2]，其中

$$(d_0, d_1, d_2, d_3) = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}).$$

利用文[5]"twisted"小波的构造方法，规范化后，得到二维正交滤波 $h = \{h_k\}_{0 \leq k_1, k_2 \leq 3}$ 为

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2+\sqrt{3} & -1 & 2-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2-\sqrt{3} & 1 & 2+\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

类似例 4.1 的证明，它满足定理 3.4 的条件，从而生成正交的 $(A,h)$ 尺度函数.

**参考文献：**


[1] COHEN A, DAUBECHIES I. *Non-separable bidimensional wavelet bases* [J]. Revista Mat. Iberoamericana, 1993, **9**: 51—137.

[2] DAUBECHIES I. *Ten Lectures on Wavelets* [M]. CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math, Vol. 61, SIAM, 1992.

[3] KOVAČEVIC J, VETTERLI M. *Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for* $R^n$[J]. IEEE Trans Inf. Theory, 1992, **38**: 533—555 (Special issue on wavelets).

[4] LAWTON W, LEE S L, SHEN Zou-wei. *Stability and orthonormal of multivariate refinable functions* [J]. SIAM J. Math. Anal., 1997, **4**: 999—1014.

[5] MAASS P. *Families of orthogonal two-dimensional wavelets* [J]. SIAM J. Math. Anal., 1996, **5**: 1454—1481.

[6] DAUBECHIES I, LAGARIAS J C. *Two-scale difference equations II. Infinite matrix products, local regularity bounds and fractals* [J]. SIAM J. Anal., 1992, **23**: 1031—1079.

[7] 龙瑞麟. 高维小波分析 [M]. 世界图书出版公司, 1995.
LONG Rui-lin. *Multivariate Wavelet Analysis* [M]. World Books Publish Corp., Beijing, 1995. (in Chinese)


# The Orthonormality of Two-Variate Scaling Functions


ZHOU Xian-bo[1], CHEN Wen-sheng[2]

(1. Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China;
2. Shenzhen University, Guangdong 518060, China)



**Abstract**: In this paper we prove a sufficient condition for $(A,h)$-scaling functions with bidimensional noninduced filters. We start from a special zero-sets of the filters and construct the compact set $K$, and obtain the proof by using Cohen criterion. Several examples are provided to illustrate the general theory.



**Key words**: scaling function; Cohen criterion; orthonormality; non-induced filters.