一类广义非线性系统的稳定性与平稳振荡*

梁 家 荣
(广西大学计算机与信息工程学院，广西 南宁 530004)

摘　要：本文运用广义李雅普诺夫函数方法研究了一类广义非线性系统，给出了其渐近稳定的判别条件，对相应的周期系统给出了其平稳振荡定理．

关键词：广义非线性系统；渐近稳定性；平稳振荡.
分类号：AMS(2000) 34C05/CLC O175.13
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)01-0141-06

1 引　言

鉴于广义系统在许多实际问题中的应用，广义系统理论已受到人们的越来越重视．作为描述广义系统动态质之一的稳定性自然是人们研究的热点，并提出了各种稳定性，如 Lyapunov 意义下的渐近稳定性[1,2]、结构稳定性[3,4]、E-渐近稳定性[5,6]，但大多都是研究广义线性系统．文献[2]研究了一般广义系统的 Lyapunov 稳定性理论，但其要求的 Lyapunov 函数构造起来是较困难的．众所周知，在实际问题中，大多数情况是不能用线性模型来描述其真实系统的，而必须用非线性模型来刻划，因而对广义非线性系统的稳定性研究就更具实际意义．本文的目的就是运用广义 Lyapunov 函数方法来研究一类广义非线性系统的稳定性问题，同时考虑具有某种分解的该类大系统的渐近稳定性，在本节的最后部给出解的有界性、平稳振荡存在性的判别准则．

2 主要结果

考虑如下一类广义非线性系统：

$$E\dot{x} = Ax + f(t,x), \quad Ex(0) = Ex^0, \tag{1}$$

其中 $E, A \in R^{n\times n}$，$f(t,x): R^+ \times R^n \to R^n$ 是关于 (t,x) 连续的向量函数，记 $\sigma(E,A) = \{\lambda | \det(\lambda E - A) = 0\}$，对(1)作如下假设：

(a) 假设对任意的初始条件 $Ex(0) = Ex^0$，(1)有且只有一个无脉冲的解 $x(t)$[2].

* **收稿日期**：1999-02-08
基金项目：国家自然科学基金(60064002)和广西自然科学基金(0009007)资助项目
作者简介：梁家荣(1966-)，男，博士，副教授.

(b) 假设 $\sigma(E,A)\subset C^-$,即 A 的广义特征根均落在复左半平面．
显然,此时 (E,A) 是正则的,即存在 $s\in C$,使得 $\det(sE-A)\neq 0$. 我们假设 $\deg|sE-A|=\mathrm{rank}E$,则由文[3,4]可得必存在正定矩阵 W,V 使得 $E^TVA+A^TVE=-E^TWE$.

下面我们给出系统(1)的零解的渐近稳定的判别准则．

定理 1 假设广义非线性系统(1)满足:

(1) $\|f(t,x)\|\leqslant\rho\|Ex\|$, $\rho>0$ 为某一常数;

(2) $\lambda_{\min}(W)>2\rho\lambda_{\max}(V)$,其中 $\lambda_{\min}(H),\lambda_{\max}(H)$ 分别表示 H 的最小、最大特征值,

则广义非线性系统(1)的零解是渐近稳定的．

证明 取(1)的广义 Lyapunov 函数 $V(Ex)=(Ex)^TV(Ex)$,则沿(1)的导数为

$$\begin{aligned}\dot V(Ex)|_{(1)}&=-(Ex)^TW(Ex)+2(Ex)^TVf(t,x)\\&\leqslant-\lambda_{\min}(W)\|Ex\|^2+2\rho\lambda_{\max}(V)\|Ex\|^2\\&=-(\lambda_{\min}(W)-2\rho\lambda_{\max}(V))\|Ex\|^2.\end{aligned}$$

因此系统(1)是 E-渐近稳定的[5],即 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex=0$ 下证它还是 Lyapunov 意义下渐近稳定的,由(1)的正则性及 $\deg|sE-A|=\mathrm{rank}E=r$ 可知必存在可逆矩阵 P,Q 使得

$$PEQ=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix},\quad PAQ=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&I_{n-r}\end{pmatrix}.$$

作变换 $x=Q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$,则(1)受限等价于

$$\dot x_1=A_1x_1+f_1(t,x),\tag{2}$$

$$0=x_2+f_2(t,x),\tag{3}$$

其中 $\begin{pmatrix}f_1(t,x)\\f_2(t,x)\end{pmatrix}=Pf(t,x)$,由 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t)=0$ 可知,$\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=0$,此外,由(3)可得,$x_2(t)=-f_2(t,x)$,再由条件(1)可知 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t,x)=0$,所以 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=\lim\limits_{t\to\infty}(-f_2(t,x))=0$,故 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to\infty}Q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$. 下面我们考虑具有如下分解的广义非线性大系统(1)

$$E_i\dot x_i=A_{ii}x_i+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}A_{ij}x_j+f_i(t,x),\quad E=\mathrm{diag}(E_1,E_2,\cdots,E_m),\tag{4}$$

其中 $x_i\in R^{n_i}$,$E_i,A_{ii},A_{ij},f_i(t,x)$ 具有相容的维数,我们假设 $\deg|sE_i-A_{ii}|=\mathrm{rank}E_i=r_i$,从而存在正定的矩阵对 W_i,V_i 使

$$E_i^TV_iA_{ii}+A_{ii}^TV_iE=-E_i^TW_iE_i,\ i=1,2,\cdots,m,\ \sum_{i=1}^{m}n_i=n.$$

定理 2 假设(1)的子系统(4)满足:

(1) $\|A_{ij}x_j\|\leqslant k_j\|E_jx_j\|$;

(2) $\|f_i(t,x)\|\leqslant\rho_i\|Ex_i\|$;

(3) $\lambda_{\min}(W_i)\geqslant\lambda_{\max}(V_i)\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}k_j+k_i\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}\lambda_{\max}(V_j)+2\rho_i\lambda_{\max}(V_i)$,

则广义非线性大系统(1)是渐近稳定的(这里 $\rho_i,k_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都为常数).

证明 取广义 Lyapunov 函数 $V(Ex)=(Ex)^T\mathrm{diag}(V_1,V_2,\cdots,V_m)(Ex)$,则

$$
\begin{aligned}
\dot V(Ex)|_{(1)} &= \sum_{i=1}^{m}[(E_i\dot x_i)^T V_i(E_i x_i) + (E_i x_i)^T V_i(E_i\dot x_i)]_{(4)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}[-(E_i x_i)^T W_i(E_i x_i) + 2\sum_{j=1,j\neq i}^{m}(E_i x_i)^T V_i A_{ij}x_j + 2(E_i x_i)^T V_i f_i(t,x)] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m}[-\lambda_{\min}(W_i)\|E_i x_i\|^2 + 2\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\|E_i x_i\|\lambda_{\max}(V_i)\|A_{ij}x_j\| + \\
&\quad 2\lambda_{\max}(V_i)\|E_i x_i\|\cdot\|f_i(t,x)\|] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m}[-\lambda_{\min}(W_i)\|E_i x_i\|^2 + \sum_{j=1,j\neq i}^{m}k_j\lambda_{\max}(V_i)(\|E_i x_i\|^2 + \|E_j x_j\|^2) + \\
&\quad 2\rho_i\lambda_{\max}(V_i)\|E_i x_i\|^2] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{-[\lambda_{\min}(W_i) - \lambda_{\max}(V_i)\sum_{j=1,j\neq i}^{m}k_j - 2\rho\lambda_{\max}(V_i)]\|E_i x_i\|^2 + \\
&\quad \sum_{j=1,j\neq i}^{m}k_j\lambda_{\max}(V_i)\|E_j x_j\|^2\} \\
&= -\sum_{i=1}^{m}[\lambda_{\min}(W_i) - \lambda_{\max}(V)\sum_{j=1,j\neq i}^{m}k_j - 2\rho_i\lambda_{\max}(V_i) - k_i\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\lambda_{\max}(V_j)]\|E_i x_i\|^2 \\
&\leqslant -\sum_{i=1}^{m}\frac{R_i}{\lambda_{\max}(V_i)}(E_i x_i)^T V_i(E_i x_i) = -h\sum_{i=1}^{m}(E_i x_i)^T V_i(E_i x_i) \\
&= -hV(Ex),
\end{aligned}
$$

其中

$$
R_i = \lambda_{\min}(W_i) - \lambda_{\max}(V_i)\sum_{j=1,j\neq i}^{m}k_j - 2\rho_i\lambda_{\max}(V_i) - k_i\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\lambda_{\max}(V_j),\ h = \frac{R_i}{\lambda_{\max}(V_i)} > 0.
$$

由文[2]知 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex(t) = 0$,从而$\lim\limits_{t\to\infty}E_i x_i = 0$,所以$\lim\limits_{t\to\infty}f_i(t,x) = 0$. 最后仿定理1的证明可知 $\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t) = 0$,故$\lim\limits_{t\to\infty}x(t) = 0$. 证毕.

下面考虑另一类广义非线性系统

$$
E\dot x = Ax + f(t,Ex),\quad Ex(t_0) = Ex^0, \tag{5}
$$

其中 $E,A\in R^{n\times n}$,$x\in R^n$,$f(t,y): R^+\times R^n\to R^n$,$y = Ex$ 是关于(t,y)连续的可微的向量函数,出于本文的需要,我们对系统(5)仍然做以下假定:

(a) 假设对任意的初始条件 $Ex(0) = Ex^0$,(5)有且只有唯一一个无脉冲的解 $x(t)$[2];

(b) 假设 $\sigma(E,A)\subset C^-$;

(c) $\deg|sE - A| = \mathrm{rank}E$.

显然,此时(E,A)是正则的,即$s\in C$,使$\det(sE - A)\neq 0$,由文[3,4]可得必有定矩阵W,V使得 $E^T VA + A^T VE = -E^T WE$,这样有

定理3 假设 $\|f(t,0)\|\leqslant F$,$F > 0$为常数,$f(t,y)$关于y满足Lyapunov条件,即存在李氏常数L,使得 $\|f(t,Ex_1) - f(t,Ex_2)\|\leqslant L\|Ex_1 - Ex_2\|$,且 $M(t,x) = V(\frac{\partial f}{\partial y}) + (\frac{\partial f}{\partial y})^T V$ 满足:

$$|\lambda I - M(t,x)| = 0, \mathrm{Re}\lambda_i(t,x) \leqslant \delta < \lambda_{\min}(W), \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

则系统(5)的解是最终有界的.

证明 取(5)的广义 Lyapunov 函数:

$$V(Ex) = (Ex)^T V(Ex),$$

则

$$\begin{aligned}
\dot{V}(Ex)|_{(5)} &= (E\dot{x})^T V(Ex) + (Ex)^T V(E\dot{x}) \\
&= -(Ex)^T W(Ex) + 2(Ex)^T V f(t,Ex) \\
&= -(Ex)^T W(Ex) + 2(Ex)^T V f(t,0) + 2(Ex)^T V \int_0^1 \frac{\partial f(t,\theta Ex)}{\partial y} \mathrm{d}\theta (Ex) \\
&\leqslant -\lambda_{\min}(W) \| Ex \|^2 + 2F\lambda_{\max}(V) \| Ex \| + 2(Ex)^T \int_0^1 V \frac{\partial f(t,\theta Ex)}{\partial y} \mathrm{d}\theta (Ex) \\
&= -\lambda_{\min}(W) \| Ex \|^2 + 2F\lambda_{\max}(V) \| Ex \| + (Ex)^T M(t,\zeta Ex)(Ex) \\
&\leqslant -\lambda_{\min}(W) \| Ex \|^2 + 2F\lambda_{\max}(V) \| Ex \| + \delta \| Ex \|^2 \\
&= -(\lambda_{\min}(W) - \delta) \| Ex \|^2 + 2F\lambda_{\max}(V) \| Ex \|.
\end{aligned}$$

利用不等式:当 $a > 0$, $b \geqslant 0$ 时,对所有 $0 \leqslant z \leqslant +\infty$ 有

$$-az^2 + bz \leqslant -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a},$$

从而

$$\dot{V}(Ex)|_{(5)} \leqslant -\frac{1}{2}(\lambda_{\min}(W) - \delta) \| Ex \|^2 + \frac{2\lambda_{\max}^2(V)F^2}{\lambda_{\min}(W) - \delta}.$$

考虑这样的区域:

$$\Omega = \{x \mid \| Ex \|^2 \leqslant \frac{8\lambda_{\min}^2(V)F^2}{(\lambda_{\min}(W) - \delta)^2}\},$$

在这个区域的补域:

$$\Omega^C = \{x \mid \| Ex \|^2 > \frac{8\lambda_{\min}^2(V)F^2}{(\lambda_{\min}(W) - \delta)^2}\}$$

和 $J = (t_0, +\infty)$ 所确定的乘积空间 $\Omega^C \times J$ 上

$$\dot{V}(Ex)|_{(5)} \leqslant -\frac{1}{4}(\lambda_{\min}(W) - \delta) \| Ex \|^2,$$

从而可知,对于系统(5)的解 $x(t)$,$Ex(t)$ 是一致最终有界的,有界域为 Ω. 下面证明 $x(t)$ 也是一致最终有界的.

由 $\deg|sE - A| = \mathrm{rank}E$ 及 (E,A) 的正则性可知,必存在可逆 P,Q 使在变换

$$x = Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

作用下(5)受限等价于:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + f_1(t,Ex), \tag{6}$$

$$0 = x_2 + f_2(t,Ex), \tag{7}$$

其中 $\begin{pmatrix} f_1(t,Ex) \\ f_2(t,Ex) \end{pmatrix} = Pf(t,Ex)$,显然,由 $Ex(t)$ 一致最终有界可知 $x_1(t)$ 必然是一致最终有界

的. 此外，由于

$$\|f(t,Ex)\| = \|f(t,Ex) - f(t,0) + f(t,0)\| \leqslant \|f(t,Ex) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \leqslant L\|Ex\| + F.$$

故 $f_2(t,Ex)$ 必然是一致最终有界的，因而 $x_2(t)$ 是一致最终有界的，从而 $x(t)$ 是一致最终有界的．

定理 4 假设(5) 满足定理 3 的条件外，还满足

$$f(t+\omega,Ex) = f(t,Ex),\ \lambda_{\min} > 2L\lambda_{\max}(V),$$

则(5) 存在唯一的周期解 $\psi(t)$ 且当 $t\to\infty$ 时，其它解均趋于它，即(5) 存在平稳振荡．

证明 由定理 3 知系统(5) 的解 $x(t)$ 是一致最终有界的，这样文献[6]知(5) 必存在周期解 $\psi(t)$，下证其唯一、稳定性，假设还有周期解 $\varphi(t)$，$\psi(t)-\varphi(t)\neq 0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}(\psi(t)-\varphi(t))\neq 0$，把 $\psi(t)$，$\varphi(t)$ 代入(5)可得

$$E\dot{\psi}(t) = A\psi(t) + f(t,E\psi(t)), \tag{8}$$

$$E\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + f(t,E\varphi(t)). \tag{9}$$

令 $h(t)=\psi(t)-\varphi(t)$，由(8)，(9)可得

$$E\dot{h}(t) = Ah(t) + f(t,E\psi(t)) - f(t,E\varphi(t)). \tag{10}$$

作(10)的 Lyapunov 函数

$$V(Eh)=(Eh)^TV(Eh),$$

则沿(10)求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}(Eh)|_{(10)} &= -(Eh(t))^TW(Eh(t)) + 2(Eh(t))^TV[f(t,E\psi(t)) - f(t,E\varphi(t))]\\ &\leqslant -\lambda_{\min}(W)\|Eh(t)\| + 2L\lambda_{\max}(V)\|Eh(t)\|^2\\ &\leqslant -(\lambda_{\min}(W) - 2L\lambda_{\max}(V))\|Eh(t)\|^2.\end{aligned}$$

注意到 $\lambda_{\min}(W) - 2L\lambda_{\max}(V) > 0$，这样仿定理 1 证明可得 $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=0$，这是矛盾．故 $\varphi(t)$ 是唯一的周期解，从上面的证明也可看出对于其它任一解 $\psi(t)$，当 $t\to\infty$ 时 $\varphi(t)\to\psi(t)$，因而 $\psi(t)$ 是广义非线性系统(5)的平稳振荡． □

3 结束语

稳定性是系统的一个重要动态品质指标，系统是否稳定对系统的运行极为重要，因而对广义非线性系统的稳定性的研究很有价值．本文处理了一类具特殊结构的广义非线性系统的稳定性问题，方法简便，易行．由于广义非线性系统的解的存在唯一性问题尚未完全解决，因此对一般广义非线性系统的稳定性的研究是较为困难的，同时也是极有意义的．

参考文献：

[1] 陈潮填，刘永清．广义线性大系统的稳定性及其关联参数稳定域［J］．华南理工大学学报，1996，**26**(5)：51－55．

CHEN Chao-tian, LIU Yong-qing. *Stability of large-scale linear singular dynamical systems and its in-*

terconnecting parameters regions [J]. J. of South China University of Technology, 1996, **26**(5): 51—55. (in Chinese)

[2] WU Han-sheng, Kolchi Mzukami. *Lyapunov stability theory and robust control of uncertain descriptor systems* [J]. Int. J. of Systems. Sci., 1995, **26**(10): 1981—1991.

[3] 戴立意,王朝珠. 广义系统结构稳定的正常动态补偿器 [J]. 系统科学与数学,1987, 7(1): 89—93.
DAI Li-yi, WANG Chao-zhu. *Structurally stable normal compensators for singular systems* [J]. J. Sys. Sci. & Math. Sci., 1987, **7**(1): 89—93. (in Chinese)

[4] 张庆灵. 广义系统结构稳定性判别李亚普诺夫方法 [J]. 系统科学与数学,1994, 4(2): 117—120.
ZHANG Qing-ling. *Lyapunov criteria for the structural stability in descriptor systems* [J]. J. Sys. Sci. & Math. Scis., 1994, **4**(2): 117—120. (in Chinese)

[5] 刘永清,温香彩. 广义系统的变结构控制 [M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1997.
LIU Yong-qing, WEN Xiang-cai. *Variable Structure Control for Singular Systems* [M]. The South China University of Technology Press, 1997. (in Chinese)

[6] 梁家荣,刘永清. 广义系统的解的有界性及周期解存在性 [J]. 华南理工大学学报, 1998, 26(10): 23—28.
LIANG Jia-rong, LIU Yong-qing. *Bound of solutions to singular systems and existence of periodic solution* [J]. J. of South China University of Technology, 1998, **26**(10): 23—28.

Asymptotic Stability and Harmonic Oscillation for Singular Nonlinear Systems

LIANG Jia-rong

(School of Computer and Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: In this paper, the method of singular Lyapunov function is used to study singular nonlinear systems, the sufficient conditions about its asymptotic stability and the harmonic oscillation theorm for it are given.

Key words: singular nonlinear systems; asymptotic stability; harmonic oscillation.