第22卷第2期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 2
2002年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2002

关于遗传 R-extending 模*

刘 仲 奎

(西北师范大学数学系，甘肃 兰州 730070)

摘 要：设 R 是有单位元的结合环，M 是右 R-模. 本文证明了若 M 是遗传的 R-extending 模，则 M 是 Noether 一致模的直和.

关键词：R-extending 模；遗传模；extending 模.

分类号：AMS(2000) 16E60,16D70/CLC O153.3

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)02-0238-03

称右 R- 模 M 是 extending 模，如果对于 M 的任意子模 N，存在 M 的直和因子 L，使得 N 是 L 的基本子模[1]. extending 模有时也叫做 CS- 模[2,3]，它有许多形式的推广[3,4]. [5] 中引入了相对 extending 模的概念. 设 M,N 是右 R- 模，令

$$\mathscr{A}(N,M)=\{A\leqslant M\mid \exists\ X\leqslant N,\exists\ f\in \mathrm{Hom}_R(X,M),f(X)\leqslant_e A\},$$

这里 $f(X)\leqslant_e A$ 表示 $f(X)$ 是 A 的基本子模. 称 M 是 N-extending 模，如果对于任意 $A\in\mathscr{A}(N,M)$，存在 M 的直和因子 L，使得 A 是 L 的基本子模.

因为 $\mathscr{A}(M,M)$ 以及 $\bigcup_{N\in \text{Mod-}R}\mathscr{A}(N,M)$ 等于 M 的所有子模构成的集合，所以 M 是 extending 模当且仅当 M 是 M-extending 模，也当且仅当对任意右 R- 模 N，M 是 N-extending 模. 因此任意 extending 模是 R-extending 模. 本文最后的例子说明反过来不对.

下面的引理是[5] 中的结果.

引理 1 设 M 是右 R- 模，$0\to N'\to N\to N''\to 0$ 是正合序列. 则 M 是 N-extending 模当且仅当 M 是 N'-extending 模且是 N''-extending 模.

称右 R- 模 M 是遗传的，如果 M 的任意子模都是投射的. [6] 中证明了如下结果：

引理 2 设 M 是遗传的 extending 模，则 M 是 Noether 一致子模的直和.

本文中利用引理 2 证明下述结果：

定理 3 设 M 是遗传的 R-extending 模，则 M 是 Noether 一致子模的直和.

证明 因为 M 是投射右 R- 模，所以 M 是某个自由右 R- 模 F 的直和因子. 而 F 显然是可数生成子模的直和，所以由 Kaplansky 定理([7,p.120])，M 是可数生成子模的直和. 由[5,命

* 收稿日期：1999-04-19

基金项目：国家自然科学基金(10171082)和高等学校骨干教师资助计划资助项目

作者简介：刘仲奎(1963-)，男，甘肃人，博士，教授.

E-mail：liuzk@nwnu.edu.cn

题 2.4]知，R-extending 模的直和因子仍然是 R-extending 模，所以不妨假定 M 是可数生成的. 设 $m_1, m_2, \cdots$ 是 M 的生成元，则

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R.$$

显然 $m_1 R \in \mathscr{A}(R, M)$. 所以存在 M 的直和因子 M_1, N_1，使得 $M = M_1 \oplus N_1$，且 $m_1 R$ 是 M_1 的基本子模. 对任意 $i \geqslant 2$，设 n_i 是 m_i 在 N_1 中的投影. 因为 N_1 也是 R-extending 模，且 $n_2 R \in \mathscr{A}(R, N_1)$，所以存在 N_1 的直和因子 M_2, N_2，使得 $N_1 = M_2 \oplus N_2$，且 $n_2 R$ 是 M_2 的基本子模. 因此 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus N_2$. 继续上述过程，可以得到直和 $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \cdots$，使得对于任意正整数 j，都有 $m_1 R + \cdots + m_j R \leqslant M_1 \oplus \cdots \oplus M_j$. 由此容易得到 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots$，且每个 M_i 中都有一个循环的基本子模.

设 $m \in M$ 且 $m \neq 0$. 则 $mR \simeq R/r(m)$. 由于 mR 是投射的，所以正合序列 $0 \to r(m) \to R \to mR \to 0$ 可裂，因此存在 R 的幂等元 e 使得 $r(m) = eR$. 所以 $r(m)$ 不是基本右理想. 这就意味着 M 是非奇异的. 因此每个 M_i 是投射的非奇异模. 由[8，命题 8.24]知 M_i 是有限生成的.

设 $M_i = \sum_{j=1}^{n} a_j R, a_j \in M_i$. 显然 $a_j R \in \mathscr{A}(R, M)$. 因为 M 是 R-extending 模，所以 M_i 也是 R-extending 模，从而由引理 1 知，M_i 是 $a_j R$-extending 模，$j = 1, \cdots, n$. 利用引理 1 易知 M_i 是 $\bigoplus_{j=1}^{n} a_j R$-extending 模. 而 $M_i = \sum_{j=1}^{n} a_j R$ 显然是 $\bigoplus_{j=1}^{n} a_j R$ 的同态像，所以再由引理 1 知 M_i 是 M_i-extending 模，从而 M_i 是 extending 模.

显然 M_i 还是遗传模，所以由引理 2，M_i 是 Noether 一致子模的直和. 因此 M 是 Noether 一致子模的直和. □

如果 R 是交换环，则[9]中证明了任意具有 Krull 维数的遗传模其 Krull 维数最多是 1. 因此有

推论 4 设 R 是交换环，M 是遗传的 R-extending 模，则 M 是 Krull 维数最多为 1 的 Noether 一致子模的直和.

称右 R- 模 M 是正则的，如果 M 的任意循环子模是 M 的直和因子.

推论 5 设 M 是正则投射的 R-extending 模，则 M 是半单的当且仅当 M 的任意子模是可数生成模的直和.

证明 设 N 是 M 的可数生成子模，$m_1, m_2, \cdots$ 是 N 的可数生成元，即 $N = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R$. 因为 M 是正则模，所以 $m_1 R$ 是 M 的直和因子，即 $M = m_1 R \oplus A_1$. 所以

$$N = N \cap M = N \cap (m_1 R \oplus A_1) = m_1 R \oplus (N \cap A_1).$$

设 m_2 在 $N \cap A_1$ 中的投影为 n_2，则 $n_2 R \subseteq N \cap A_1$. 而 $n_2 R$ 是 M 的直和因子，所以同上证明可知 $n_2 R$ 也是 $N \cap A_1$ 的直和因子，即 $N \cap A_1 = n_2 R \oplus A_2$. 所以 $N = m_1 R \oplus n_2 R \oplus A_2$. 继续上述过程，则容易证明 N 是循环子模的直和. 由于 M 是正则投射的，所以 N 是投射模.

设 M 的任意子模是可数生成模的直和，则由已证的结果可知 M 的任意子模都是投射的，因此 M 是遗传模. 由定理 3 即知 M 是 Noether 一致子模的直和. 因为正则的一致模是单的，所以 M 是半单模.

反过来的证明是显然的. □

最后用例子说明遗传的 R-extending 模可以不是 extending 模.

例 令 $R=\mathbb{Z}$,I 为无限指标集,$M=\bigoplus_{i\in I}R$. 则 M 是自由 R-模,M 的任意子模都是投射的,所以 M 是遗传模.

设 $A\in\mathscr{A}(R,M)$,则存在 $X\leqslant R$,$f\in\mathrm{Hom}(X,M)$,使得 $f(X)\leqslant_e A$. 因为 R 是 Noether 环,所以 X 是有限生成的,因此 A 中包含一个有限生成的基本子模 $f(X)$. 易知存在有限集合 $J\subseteq I$,使得:$f(X)\leqslant N=\bigoplus_{i\in J}R$. 显然 M/N 是挠自由的,而$(A+N)/N\simeq A/(A\cap N)$ 是挠的,所以 $A\leqslant N$. 设 L 是 A 在 M 中的最大的基本扩张,因为$(L+N)/N\simeq L/(L\cap N)$ 是挠的,所以 $L\leqslant N$. 从而 N/L 是有限生成的挠自由模,故 L 是 N 的直和因子,从而 L 是 M 的直和因子,所以 M 是 R-extending 模. 由[10] 知 M 不是 extending 模.

参考文献:

[1] DUNG N V, HUYNH D, SMITH P F, et al. *Extending Modules* [M]. Pitman Research Notes in Mathematics 313, Longman, 1994.

[2] OSOFSKY B L, SMITH P F. *Cyclic modules whose quotients have all complement submodules direct summands* [J]. J. Algebra, 1991, **139**: 342—354.

[3] SMITH P F, TERCAN A. *Generalizations of CS-modules* [J]. Comm. Algebra, 1993, **21**: 1809—1847.

[4] SMITH P F. *CS-modules and weak CS-modules* [J]. In Non-Commutative Ring Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics, 1990, **1448**: 99—115.

[5] LOPEZ-PERMOUTH S R, OSHIRO K, TARIQ RIZVI S. *On the relative (quasi-)continuity of modules* [J]. Comm. Algebra, 1998, **26**: 3497—3510.

[6] DUNG N V, SMITH P F. *Hereditary CS-modules* [J]. Math. Scand, 1992, **71**: 173—180.

[7] FAITH C. *Algebra* Ⅰ: *Ring Theory* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[8] CHATTERS A W, HAJARNAVIS C R. *Rings with Chain Conditions* [M]. Pitman, London, 1980.

[9] JONDRUP S. *Projective modules with krull dimensions* [J]. Math. Scand., 1982, **51**: 227—231.

[10] DOGRUOZ S, SMITH P F. *Modules which are extending relative to module classes* [J]. Comm. Algebra, 1998, **26**: 1699—1721.

On Hereditary R-extending Modules

LIU Zhong-kui

(Dept. of Math., Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let R be an associative ring with identity and M a right R-module. It is proved that if M is a hereditary R-extending module, then M is a direct sum of Noetherian uniform modules.

Key words: R-extending module; hereditary module; extending module.