第22卷第2期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 2
2002年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2002

关于遍历测度乘积的遍历性*

林 一 星

(龙岩师范学校，福建 龙岩 364000)

摘　要：本文利用拟特征标序列收敛的零—律与遍历测度的关系[1]，讨论了遍历测度乘积的遍历性.

关键词：遍历测度；拓扑；测度空间.

分类号：AMS(2000) 28D,46N30/CLC O177.99

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2002)02-0285-04

关于遍历测度的乘积测度是否遍历，在一般情况下还不知道，加适当条件就能保证乘积测度的遍历性，本文讨论了这个问题.

定理1　设 G_i 为第二纲联络拓扑群，$\Omega_i=(G_i,\beta_i,\mu_i)$ 是关于 G_i 拟不变遍历正则概率测度空间，$i=1,2$，$((g_1,h_1),(g_2,h_2))\to(g_1g_2,h_1h_2)$ 是 $((G_1\times G_2)\times(G_1\times G_2),(\beta_1\times\beta_2)\times(\beta_1\times\beta_2))$ 到 $(G_1\times G_2,\beta_1\times\beta_2)$ 的可测映照，令

$$\Omega=(G,\beta,\mu)=(G_1\times G_2,\beta_1\times\beta_2,\mu_1\times\mu_2),$$

则

(1) 若 $\{\alpha_k(g,h)\}$ 为 Ω 上关于 G 的拟特征标序列，那么

(i) $\mu(\{(g,h)\mid\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k(g,h)$ 收敛$\})=0$ 或 1;

(ii) $\mu(\{(g,h)\mid\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k(g,h)=1\})=0$ 或 1.

(2) Ω 关于 G 拟不变遍历概率测度空间.

证明　设 $\mu(E)=0$，则

$$\begin{aligned}\{h_2\mid(g_2,h_2)\in(g_1,h_1)E\}&=\{h_2\mid(g_1,h_1)^{-1}(g_2,h_2)\in E\}\\&=\{h_2\mid(g_1^{-1}g_2,h_1^{-1}h_2)\in E\}\\&=h_1\{h_1^{-1}h_2\mid(g_1^{-1}g_2,h_1^{-1}h_2)\in E\}\\&=h_1\{h_3\mid(g_3,h_3)\in E\},\end{aligned}$$

其中 $(g_1,h_1)\in G_1\times G_2$，因 $\mu_1\times\mu_2(E)=0$，故 $\mu_2(\{h_3\mid(g_3,h_3)\in E\})=0$，由 μ_2 的拟不变性知，$\mu_2(h_1\{h_3\mid(g_3,h_3)\in E\})=0$，因此 $\mu_2(\{h_2\mid(g_2,h_2)\in(g_1,h_1)E\})=0$. 所以 $\mu_2\times\mu_2((g_1,h_1)E)=0$，于是 Ω 为关于 G 拟不变概率测度空间.

---

* 收稿日期：1999-03-26

作者简介：林一星(1940-)，男，福建省龙岩市人，高级讲师.

设 $\tilde{E}=\{(g,h)\mid \lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k(g,h)$ 收敛$\}$，$\mu(\tilde{E})>0$，由文[2]例 3.2.5 知，存在关于 $(G_1\times G_2,\beta_1\times\beta_2)$ 可测特征标 $\tilde{\alpha}_k(g,h)$ 及 C_k，$|C_k|=1$，使 $\alpha_k(g,h)$ 关于 μ 几乎处处等于 $C_k\tilde{\alpha}_k(g,h)$，$k=1,2,\cdots$，注意到可列个零集的并还是零集知，存在可测集 N，使 $\mu(N)=1$，且在 N 上，

$$\alpha_k(g,h)=C_k\tilde{\alpha}_k(g,h),\ k=1,2,\cdots,$$

设 $E=\{(g,h)\mid \lim\limits_{k\to\infty}C_k\tilde{\alpha}_k(g,h)$ 收敛$\}$，则 $\tilde{E}\supset E\cap N$，故 $\mu(\tilde{E})\geqslant\mu(E\cap N)=\mu(E)$，同理 $\mu(E)\geqslant\mu(\tilde{E})$，于是 $\mu(\tilde{E})=\mu(E)>0$，设 $\beta_k(g,h)=C_k\tilde{\alpha}_k(g,h)$，$k=1,2,\cdots$，$e_2$ 为 G_2 的单位元，因

$$\begin{aligned}\beta_k((g_1,e_2)(g_2,h))&=C_k\tilde{\alpha}_k(g_1,e_2)\tilde{\alpha}_k(g_2,h)=\tilde{\alpha}_k(g_1,e_2)\beta_k(g_2,h)\\&=\beta_k(g_1g_2,h),\end{aligned}$$

故

$$\frac{\beta_k(g_1g_2,h)}{\beta_k(g_2,h)}=\tilde{\alpha}_k(g_1,e_2),k=1,2,\cdots,$$

所以当固定 $h\in G_2$ 时，$\{\beta_k(g,h)\}$ 是 (G_1,β_1,μ_1) 上关于 G_1 的拟特征标序列，因 $\mu(E)>0$，由乘积测度的定义知，存在 $B\in\beta_2$，使 $\mu_2(B)>0$，且当 $h\in B$ 时，

$$\mu_1(\{g\mid(g,h)\in E\})>0.$$

当 $h\overline{\in}B$ 时，

$$\mu_1(\{g\mid(g,h)\in E\})=0.$$

由文[2]引理 3.1.7 知，G_i 的拓扑是适宜的，由 $\{g\mid \lim\limits_{k\to\infty}\beta_k(g,h)$ 存在$\}=\{g\mid(g,h)\in E\}$ 和文[1]定理 1 知，当 $h\in B$ 时，$\mu_1(\{g\mid(g,h)\in E\})=1$，同理存在 $A\in\beta_1$，使 $\mu_1(A)>0$，且当 $g\in A$ 时，$\mu_2(\{h\mid(g,h)\in E\})=1$，当 $g\overline{\in}A$ 时，$\mu_2(\{h\mid(g,h)\in E\})=0$，由乘积测度的定义知

$$\mu_1\times\mu_2(E)=\int_{G_2}\mu_1(\{g\mid(g,h)\in E\})\mathrm{d}\mu_2(h)=\int_B\mathrm{d}\mu_2(h)=\mu_2(B),$$

同理 $\mu_1\times\mu_2(E)=\mu_1(A)$.

因 $\mu_1(\{g\mid(g,h)\in E,h\overline{\in}B\})=0$，$\mu_2(\{h\mid(g,h)\in E,g\overline{\in}A\})=0$，由乘积测度的定义知，

$$\mu_1\times\mu_2(\{(g,h)\mid(g,h)\in E,h\overline{\in}B\})=0,$$

$$\mu_1\times\mu_2(\{(g,h)\mid(g,h)\in E,g\overline{\in}A\})=0.$$

因 $E\subset(A\times B)\cup\{(g,h)\mid(g,h)\in E,h\overline{\in}B\}\cup\{(g,h)\mid(g,h)\in E,g\overline{\in}A\}$，故

$$\mu_1\times\mu_2(E)\leqslant\mu_1(A)\times\mu_2(B),\text{由 }\mu_1\times\mu_2(E)=\mu_1(A)>0,$$

知 $\mu_2(B)\geqslant1$，从而，$\mu_2(B)=1$，因此 $\mu_1\times\mu_2(E)=1$，于是 $\mu(\tilde{E})=1$，同理可证

$$\mu(\{(g,h)\mid \lim_{k\to\infty}\alpha_k(g,h)=1\})=0\text{ 或 }1.$$

设 E 为关于 G 的拟不变集，且 $\mu(E)>0$，作函数 $\alpha(g,h)$ 如下：

当 $(g,h)\in E$ 时，$\alpha(g,h)=1$，当 $(g,h)\overline{\in}E$ 时，$\alpha(g,h)=-1$，易知 $\alpha(g,h)$ 是 Ω 上关于 G 的拟特征标，作拟特征标序列 $\{\alpha_k(g,h)\}$ 如下：

当 n 为奇数时，$\alpha_k(g,h)=\alpha(g,h)$，当 n 为偶数时，$\alpha_k(g,h)=1$. 则 $E=\{(g,h)\mid \lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k(g,h)$ 收敛$\}$，由(1)知 $\mu(E)=1$，于是 Ω 关于 G 是遍历的. □

下面恒设 $((g_1,h_1),(g_2,h_2))\to(g_1g_2,h_1h_2)$ 是 $((G_1\times G_2)\times(G_1\times G_2),(\beta_1\times\beta_2)\times(\beta_1$

$\times \beta_2)$ 到 $(G_1 \times G_2, \beta_1 \times \beta_2)$ 的可测映照.

系 2 设 G_i 为第二纲线性拓扑空间, $\Omega_i = (G_i, \beta_i, \mu_i)$ 是关于 G_i 拟不变遍历正则概率测度空间, $i = 1,2$, 则定理 1 的结论也成立.

证明 线性拓扑空间是按加法的联络拓扑群, 由此即知.

定理 3 设 G_i 为线性拓扑空间, $\Omega_i = (G_i, \beta_i, \mu_i)$ 是关于 G_i 拟不变拟连续遍历正则概率测度空间, $i = 1,2$, 则定理 1 的结论也成立.

证明 利用文[1]定理 8 系 1, 与定理 1 的证明类似, 可证定理 3.

定理 4 $\Omega_i = (G_i, \beta_i, \mu_i)$ 是关于 G_i 拟不变遍历正则概率测度空间, G_i 为联络拓扑群, Ω_i 关于 G_i 正常连续[3], $i = 1,2$, 则定理 1 的结论也成立.

证明 利用文[3]定理 10 推论 11, 与定理 1 的证明类似, 可证定理 4.

下面讨论测度卷积的遍历性.

定理 5 设 G 为第二纲联络交换拓扑群, $\Omega_i = (G, \beta, \mu_i)$ 是关于 G 拟不变遍历正则概率测度空间, $i = 1,2$, 则在 (G, β) 上的卷积 $\mu_1 * \mu_2$ 是关于 G 拟不变遍历概率测度空间.

证明 作由 $G \times G$ 到 G 的可测变换

$$T(g_1, g_2) = g_1 g_2.$$

当 $E \in \beta$ 时, $\mu_1 * \mu_2(E) = \mu_1 \times \mu_2(T^{-1}(E))$, 特别 $\mu_1 * \mu_2(G) = 1$.

设 $\mu_1 * \mu_2(E) = 0$, 则 $\mu_1 \times \mu_2(T^{-1}(E)) = 0$, 由定理 1 知, $\mu_1 \times \mu_2$ 是关于 $G \times G$ 拟不变的, 从而当 $(h_1, h_2) \in G \times G$ 时,

$$\mu_1 \times \mu_2((h_1, h_2)(T^{-1}(E))) = 0.$$

特别 $\mu_1 \times \mu_2((h, e)(T^{-1}(E))) = 0$, 其中 e 为 G 的单位元, $h \in G$.

$$\begin{aligned}(h,e)(T^{-1}(E)) &= (h,e)\{(g_1,g_2) | g_1 g_2 = E\} = \{(hg_1, g_2) | g_1 g_2 \in E\} \\ &= \{(g_1, g_2) | g_1 g_2 \in hE\} = T^{-1}(hE).\end{aligned}$$

所以

$$\mu_1 * \mu_2(hE) = \mu_1 \times \mu_2(T^{-1}(hE)) = \mu_1 \times \mu_2((h,e)(T^{-1}(E))) = 0,$$

于是卷积 $\mu_1 * \mu_2$ 关于 G 拟不变.

设 E 是 $\mu_1 * \mu_2$ 关于 G 的拟不变集, 对于所有 $h \in G$, 则有

$$\mu_1 * \mu_2(hE \Delta E) = 0,$$

从而 $\mu_1 \times \mu_2(T^{-1}(hE \Delta E)) = 0$, 于是 $\mu_1 \times \mu_2((T^{-1}(hE)) \Delta (T^{-1}(E))) = 0$, 由 G 是交换群知, 当 $(h_1, h_2) \in G \times G$ 时,

$$\begin{aligned}(h_1,h_2)(T^{-1}(E)) &= (h_1,h_2)\{(g_1,g_2) | g_1 g_2 \in E\} = \{(h_1 g_1, h_2 g_2) / g_1 g_2 \in E\} \\ &= \{(g_1, g_2) | g_1 g_2 \in h_1 h_2 E\} = T^{-1}(h_1 h_2 E),\end{aligned}$$

所以

$$\mu_1 \times \mu_2(((h_1,h_2)(T^{-1}(E)))\Delta(T^{-1}(E))) = \mu_1 \times \mu_2(T^{-1}(h_1 h_2 E) \Delta T^{-1}(E)) = 0,$$

即 $T^{-1}(E)$ 关于 $G \times G$ 是拟不变集, 由定理 1 知, $\mu_1 \times \mu_2$ 是关于 $G \times G$ 的遍历测度, 因此 $\mu_1 \times \mu_2(T^{-1}(E)) = 0$ 或 1, 即 $\mu_1 * \mu_2(E) = 0$ 或 1, 故 $\mu_1 * \mu_2$ 是关于 G 遍历的. □

定理 6 设 G 为线性拓扑空间, $\Omega_i = (G, \beta, \mu_i)$ 是关于 G 拟不变拟连续遍历正则概率测度空间, $i = 1,2$, 则定理 5 的结论也成立.

证明　利用定理 3，证法与定理 5 类似.

定理 7　设 $\Omega_i=(G,\beta,\mu_i)$ 是关于 G 拟不变遍历正则概率测度空间，G 为联络拓扑群，且 Ω_i 关于 G 正常连续[3]，$i=1,2$，则定理 5 的结论也成立.

证明　利用定理 4，证法与定理 5 类似.

注　系 2 推广了文[4]的定理 5.

参考文献：

[1] 林一星. 拟特征标序列收敛的零一律与遍历测度的关系 [J]. 数学年刊 A 辑，1987，**8**(6)：664－667.
LIN Yi-xing. *Relations between the zero-one law of the convergence of quasi character sequence and ergodic measure* [J]. Chinese Annals of Mathematics，1987，**8**(6)：664－667. (in Chinese)

[2] 夏道行. 无限维空间上测度和积分论 [M]. 上海：上海科技出版社，1965.
XIA Dao-xing. *Measure and Integration Theory on Infinite-Dimensional Spaces* [M]. Shanghai：Shanghai Science & Technology Press，1965. (in Chinese)

[3] 林一星. 关于测度与拓扑的几个定理 [J]. 数学杂志，1996，**1**：25－29.
LIN Yi-xing. *Several theorems on the measure and topology* [J]. Jounral of Mathematics，1996，**1**：25－29. (in Chinese)

[4] 杨亚立. 关于遍历拟不变测度 [J]. 中国科学，1980，**9**：830－837.
YANG Ya-li. *On the ergodic quasi-invariant measure* [J]. Sci. in China，1980，**9**：830－837. (in Chinese)

Ergodicity on Ergodic Measure Product

LIN Yi-xing
(Longyan Normal School，Fujian 364000，China)

Abstract：In this paper，we discuss evgodicity of ergodic measure product by means of the relations between the zero-one law of the convergence of quasi-character sequence and ergodic measure.

Key words：ergodic measure；topology；measure space.