第22卷第2期
2002年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 22 No. 2
May 2002

一个类似于KN族的可积系及其可积耦合*

张玉峰[1,2]　　张鸿庆[1]

(1. 大连理工大学应用数学系，辽宁 大连 116024；2. 山东科技大学信息学院，山东 泰安 271019)

摘　要：本文选用loop代数 $\tilde{A}_1$ 的一个子代数，建立了一个线性等谱问题，导出了一个类似KN族的可积方程族. 通过建立求可积耦合的一种简便直接方法，求出了该方程族的可积耦合. 这种方法也适用于其它方程族.

关键词：可积系；loop代数 $\tilde{A}_1$；等谱问题；可积耦合.

分类号：AMS(2000) 35Q51, 37K10/CLC O175.29

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2002)02-0289-06

1 引　言

以具有孤立子解为其特征之一的完全可积系，广泛应用于场论、流体力学、非线性光学等一系列领域，近年来的研究十分活跃. 寻求新的可积系一直是可积系理论中一个重要课题，目前最简便有效的方法之一是屠格式[1]，即

1) 设出loop代数 $\tilde{A}_1$ 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_p\}$ 及其阶化，并令新的等谱问题为 $\varphi_x=U\varphi, U=R+u_1e_1+\cdots+u_pe_p$，其中 R 为伪正则元；

2) 求解伴随方程

$$V_x=[U,V] \tag{1.1}$$

的同秩解 $V=\sum_{m\geqslant 0}\left(\sum_{i=1}^{p}a_{in}e_i(-m)\right)$；

3) 寻找修正项 $\Delta_n\in\tilde{G}$，使 $V^{(n)}=(\lambda^nV)_++\Delta_n$ 满足 $V_x^{(n)}-[U,V^{(n)}]=k_1^{(n)}e_1+\cdots+k_p^{(n)}e_p$，则零曲率方程 $U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0$ 产生一族Lax可积发展方程族

$$u_{it}=l_i^{(n)}(u),\quad i=1,2,\cdots,p; \tag{1.2}$$

4) 设(1.2)可由Hamilton算子 J 与递推算子 L 表示为

$$u_t=JL^nf(u); \tag{1.3}$$

5) 若 J 与 L 满足：$J^*=-J, JL=L^*J$，则(1.3)是Liouville意义下的可积系且 $\{H_n\}$ 构成彼此对合的守恒密度.

* **收稿日期**：2000-10-25

基金项目：国家重点基础科学研究项目(G1998030600)

作者简介：张玉峰(1963-)，男，博士，副教授.

在屠格式中，伴随方程(1.1)的解需用循环算子来表出，并要求 U 中谱参数 λ 的次数不能过高与过低，这就限制了等谱问题的建立. 为此郭福奎教授在文献[2]中提出了一个解决途径，即寻找 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的子代数，使其相邻基元中 λ 的次数差大于 1. 基于该思想，本文选用 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一组基

$$\begin{cases} h(n) = \begin{pmatrix} \lambda^{2n} & 0 \\ 0 & -\lambda^{2n} \end{pmatrix},\ e(n) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{2n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \\ [h(m), e(n)] = 2e(m+n), [h(m), f(n)] = -2f(m+n) \\ [e(m), f(n)] = h(m+n+1) \\ \deg h(n) = 2n,\ \deg e(n) = \deg f(n) = 2n+1 \end{cases} \tag{1.4}$$

构造一个等谱问题，再利用屠格式导出一族类似 KN 族可积系. 可积耦合是孤立子理论的一个新的研究方向，在研究可积系的无中心 Virasoro 对称代数时，产生了这一概念[3].

设

$$u_t = k(u) \tag{1.5}$$

为已知可积系，称

$$\begin{cases} u_t = k(u) \\ v_t = s(u,v) \end{cases} \tag{1.6}$$

为(1.5)的可积耦合，若(1.6)仍然是可积的，并且 $s(u,v)$ 显含 u 或 v 对 x 的导数. 人们已发展了两种求可积耦合的方法[3,4]：

(i) 原方程加其线性化方程；

(ii) 摄动方法.

由这两种方法仅能得到一个方程的可积耦合. 本文通过构造一个恰当的 loop 代数 $\tilde{G}$，建立了一种简捷有效的求孤子方程族的可积耦合的直接方法，由此求出了所得可积系的可积耦合. 这种方法具有广泛应用性.

2 演化方程族

考虑等谱问题

$$\psi_x = U\psi,\ \lambda_t = 0,\ U = h(1) + qe(0) + rf(0). \tag{2.1}$$

令 $V = \sum_{m\geqslant 0}(a_m h(-m) + b_m e(-m) + c_m f(-m))$，解伴随方程

$$V_x = [U,V], \tag{2.2}$$

得递推关系

$$\begin{cases} a_{mx} = qc_{m+1} - rb_{m+1}, \\ b_{mx} = 2b_{m+1} - 2qa_m, \\ c_{mx} = -2c_{m+1} + 2ra_m, \\ b_0 = c_0 = 0, a_0 = \beta, \\ b_1 = \beta q, c_1 = \beta r, a_1 = \dfrac{\beta}{2}qr, \end{cases} \tag{2.3}$$

记

$$\begin{cases} V_+^{(n)} = (\lambda^{2n}V)_+ = \sum_{m=0}^{n}(a_m h(n-m) + b_m e(n-m) + c_m f(n-m)), \\ V_-^{(n)} = \lambda^{2n}V - V_+^{(n)}, \end{cases}$$

则由(2.2)知

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}]. \tag{2.4}$$

(2.4)的左端所含基元阶数(deg)$\geqslant 0$,右端阶数$\leqslant 1$,于是

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = 2c_{n+1}f(0) - 2b_{n+1}e(0) + (rb_{n+1} - qc_{n+1})h(0),$$

令 $V^{(n)} = V_+^{(n)} + \Delta_n, \Delta_n = a_n h(0)$,则由零曲率方程 $U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0$ 确定 Lax 可积系:

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 2b_{n+1} - 2qa_n \\ 2ra_n - 2c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{nx} \\ c_{nx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ b_n \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} c_n \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

其中 J 为辛算子. 由(2.3)知

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\partial - r\partial^{-1}q\partial & -r\partial^{-1}r\partial \\ -q\partial^{-1}q\partial & \partial - q\partial^{-1}r\partial \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ b_n \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} c_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

于是(2.5)又可写成

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = JL^{n-1}\begin{pmatrix} \beta r \\ \beta q \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

因 $V = ah(0) + be(0) + cf(0) = \begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & -a \end{pmatrix}$,其中 $a = \sum_{m\geqslant 0} a_m\lambda^{-m}, b = \sum_{m\geqslant 0} b_m\lambda^{-m}, c = \sum_{m\geqslant 0} c_m\lambda^{-m}$.
将 $\langle V, \frac{\partial U}{\partial\lambda}\rangle = (4a + rb + qc)\lambda, \langle V, \frac{\partial U}{\partial q}\rangle = c\lambda^2, \langle V, \frac{\partial U}{\partial r}\rangle = b\lambda^2$ 代入迹恒等式

$$\frac{\delta}{\delta u}\langle V, \frac{\partial U}{\partial\lambda}\rangle = \lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^{\gamma}\begin{pmatrix} \langle V, \frac{\partial U}{\partial q}\rangle \\ \langle V, \frac{\partial U}{\partial r}\rangle \end{pmatrix}\right),$$

并比较 λ^{-2n+1} 的系数得

$$\frac{\delta}{\delta u}(4a_n + rb_n + qc_n) = (-2n + 2 + \gamma)\begin{pmatrix} c_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

在上式中,令 $n = 1$ 知 $\gamma = 4$. 从而有

$$\begin{pmatrix} c_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{\delta H_n}{\delta u},\ H_n = \frac{4a_n + rb_n + qc_n}{-2n + 6}.$$

方程族(2.6) 可写成 Hamilton 形式

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = JL^{n-1}\begin{pmatrix} \beta r \\ \beta q \end{pmatrix} = J\frac{\delta H_n}{\delta u}. \tag{2.7}$$

易验证

$$JL = L^*J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\partial q\partial^{-1}q\partial & \partial^2 - \partial q\partial^{-1}r\partial \\ -\partial^2 - \partial r\partial^{-1}q\partial & -\partial r\partial^{-1}r\partial \end{pmatrix}.$$

故方程族(2.7) 是 Liouville 意义下的可积系.

3　方程族(2.7)的可积耦合

设有 loop 代数 $\widetilde{G}$,它有两个子代数 $\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2$ 满足

$$\widetilde{G}_1 \text{ 同构于 } \widetilde{A}_1,\ [\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2] \subset \widetilde{G}_2. \tag{3.1}$$

由(3.1)可建立相应于(2.1)的等谱问题,使导出的可积方程族为已导出方程族(2.7)的可积耦合.

设 G 是以 $\{e_1,e_2,e_2,e_4,e_5\}$ 为基的线性空间,规定其换位运算为

$$\begin{cases}[e_1,e_2]=2e_2,[e_1,e_3]=-2e_3,[e_1,e_4]=e_4,[e_1,e_5]=-e_5,\\ [e_2,e_3]=e_1,[e_2,e_4]=0,[e_2,e_5]=e_4,[e_3,e_4]=e_5,[e_3,e_5]=0,[e_4,e_5]=0\end{cases} \tag{3.2}$$

记 $a=\sum_{i=1}^{5}a_ie_i,b=\sum_{i=1}^{5}b_ie_i,c=\sum_{i=1}^{5}c_ie_i$,其中 a_i,b_i,c_i 为任意常数(或函数),则 Jacobi 恒等式成立

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0. \tag{3.3}$$

因此 G 是一个 Lie 代数.

以

$$\begin{cases}e_i(n)=e_i\lambda^{2n},\ i=1,2,3,4,5,\\ [e_2(m),e_3(n)]=[e_2,e_3]\lambda^{2m+2n+2},\\ [e_i(m),e_j(n)]=[e_i,e_j]\lambda^{2m+2n},i=2,j\neq 3 \text{ 或 } i=3,j\neq 2,\\ \deg e_1(n)=\deg e_4(n)=\deg e_5(n)=2n,\deg e_2(n)=\deg e_3(n)=2n+1\end{cases} \tag{3.4}$$

为基,显然由 G 构成了 loop 代数 $\widetilde{G}$. 令 $\widetilde{G}_1=\mathrm{span}\{e_1(n),e_2(n),e_3(n)\},\widetilde{G}_2=\mathrm{span}\{e_4(n),e_5(n)\}$,span 表示张成子空间,易见这里得到的 $\widetilde{G}_1$ 与 $\widetilde{G}_2$ 满足(3.1).

取线性问题的形式为

$$\psi_x=[U,\psi],\ \lambda_t=0,\ \psi_t=[V,\psi], \tag{3.5}$$

其中 $\psi=\sum_{i=1}^{5}\psi_ie_i,\psi_i$ 为任意函数,$U=U(u,\lambda)\in\widetilde{G},V=V(u,\lambda)\in\widetilde{G},u=(u_1,\cdots,u_p)^T$ 为函数向量,λ 是谱参数.

由(3.5)的相容性条件得

$$[U_t,\psi]+[U,[V,\psi]]-[V_x,\psi]-[V,[U,\psi]]=0. \tag{3.6}$$

由 Jacobi 恒等式(3.3),(3.6)可化为:

$$[U_t,\psi]-[V_x,\psi]+[[U,V],\psi]=0. \tag{3.7}$$

因 ψ 任意,由(3.7)可得到零曲率方程

$$U_t-V_x+[U,V]=0. \tag{3.8}$$

取线性等谱问题为

$$\psi_x=U\psi,\ \lambda_t=0,\ U=e_1(1)+u_1e_2(0)+u_2e_3(0)+u_3e_4(0)+u_4e_5(0). \tag{3.9}$$

设 $V=\sum_{m\geqslant 0}(a_me_1(-m)+b_me_2(-m)+c_me_3(-m)+d_me_4(-m)+f_me_5(-m))$,解方程

$$V_x=[U,V], \tag{3.10}$$

得递推关系

$$
\begin{cases}
a_{mx} = u_1 c_{m+1} - u_2 b_{m+1}, \\
b_{mx} = 2b_{m+1} - 2u_1 a_m, \\
c_{mx} = -2c_{m+1} + 2u_2 a_m, \\
d_{mx} = d_{m+1} + u_1 f_m - u_3 a_m - u_4 b_m, \\
f_{mx} = -f_{m+1} + u_2 d_m - u_3 c_m + u_4 a_m, \\
b_0 = c_0 = d_0 = f_0 = 0,\ a_0 = \beta = \text{const} \neq 0, \\
b_1 = \beta u_1,\ c_1 = \beta u_2,\ a_1 = \dfrac{\beta}{2} u_1 u_2,\ d_1 = \beta u_3,\ f_1 = \beta u_4.
\end{cases} \tag{3.11}
$$

记

$$
\begin{cases}
V_+^{(n)} = \sum\limits_{m=0}^{n} (a_m e_1(n-m) + b_m e_2(n-m) + c_m e_3(n-m) + d_m e_4(n-m) + f_m e_5(n-m)), \\
V_-^{(n)} = \lambda^{2n} V - V_+^{(n)},
\end{cases}
$$

则(3.10)可写为

$$
-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}].
$$

上式左端所含基元阶数≥0，右端阶数≤1，于是

$$
-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = (u_1 c_{n+1} - u_2 b_{n+1}) e_1(0) + 2b_{n+1} e_2(0) - 2c_{n+1} e_3(0) + d_{n+1} e_4(0) - f_{n+1} e_5(0).
$$

记 $V^{(n)} = V_+^{(n)} + \Delta_n$, $\Delta_n = a_n e_1(0)$，则由零曲率方程(3.8)确定可积系

$$
u_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 2u_1 a_n - 2b_{n+1} \\ 2c_{n+1} - 2u_2 a_n \\ u_3 a_n - d_{n+1} \\ f_{n+1} - u_4 a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{nx} \\ -c_{nx} \\ u_3 a_n - d_{n+1} \\ f_{n+1} - u_4 a_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & -\partial & 0 & 0 \\ -\partial & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_4 & u_1 & -\partial \\ -u_3 & 0 & -\partial & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ b_n \\ f_n \\ d_n \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} c_n \\ b_n \\ f_n \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{3.12}
$$

由(3.11)知

$$
\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ b_{n+1} \\ f_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(u_2 \partial^{-1} u_1 \partial + \partial) & -\frac{1}{2} u_2 \partial^{-1} u_2 \partial & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} u_1 \partial^{-1} u_1 \partial & \frac{1}{2}(\partial - u_1 \partial^{-1} u_2 \partial) & 0 & 0 \\ -u_3 - \frac{1}{2} u_4 \partial^{-1} u_1 \partial & -\frac{1}{2} u_4 \partial^{-1} u_2 \partial & -\partial & u_2 \\ -\frac{1}{2} u_3 \partial^{-1} u_1 \partial & u_4 - \frac{1}{2} u_3 \partial^{-1} u_2 \partial & -u_1 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ b_n \\ f_n \\ d_n \end{pmatrix}
$$

$$
= L \begin{pmatrix} c_n \\ b_n \\ f_n \\ d_n \end{pmatrix}.
$$

于是(3.12)可写成

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=JL^{n-1}\begin{pmatrix}\beta u_2\\\beta u_1\\\beta u_4\\\beta u_3\end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

方程族(3.13)是由零曲率方程(3.8)导出的，所以是可积的. 由 J 与 L 的构造与(2.6)作比较知，(3.13)是已导出方程族(2.6)的可积耦合.

致谢 第一作者感谢山东科技大学郭福奎教授、复旦大学范恩贵博士的热情指导和帮助.

参考文献：

[1] TU Gui-zhang, *The trace identity, a powerful tool for constructing the Hamiltonian structure of integrable systems* [J]. J. Math. Phy., 1989, **30**(2): 330—338.

[2] 郭福奎. loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的子代数与可积 Hamilton 方程族 [J]. 数学物理学报, 1999, **19**(5): 507—512. GUO Fu-kui. *Subalgebras of the loop algebra $\tilde{A}_1$ and integrable Hamiltonian hierarchies of equations* [J]. Acta. Math. Sci., 1999, **19**(5): 507—512.

[3] FUCHSSTEINER B. *Coupling of completely integrable systems: the perturbation bundle* [J]. Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations (P. A. Clarkson, ed.) Kluwer, Dordrecht, 1993, 125—138.

[4] LAKSHMANAN M, TAMIZHANI K M. *Lie-Bäcklund symmetries of certain nonlinear evolution equations under perturbation around solution* [J]. J. Math. Phys., 1985, **26**: 1189—1200.

An Integrable System Similar to the KN Hierarchy and Its Integrable Coupling

ZHANG Yu-feng[1,2] ZHANG Hong-qing[1]

(1. Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China;
2. Information School, Shangdong University of Science and Technology, Taian 271019, China)

Abstract: A linear isospectral problem is established by choosing a subalgebra of loop algebra $\tilde{A}_1$, from which an integrable hierarchy of equations similar to the KN hierarchy is derived. A simple straightforward method for obtaining integrable couplings is proposed. It follows that the integrable coupling of the above hierarchy is obtained. This method can be used generally.

Key words: integrable system; loop algebra $\tilde{A}_1$; isospectral problem; integrable coupling.