第 22 卷第 2 期　　数学研究与评论　　Vol. 22 No. 2
2002 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2002

# 一类非自治时滞微分方程的全局稳定性*

赵久利[1]，　葛渭高[2]

(1. 炮兵指挥学院基础部，河北 宣化 075100； 2. 北京理工大学应用数学系，北京 100081)

**摘　要**：考虑了一类非自治时滞微分方程

$$\dot{x} = r(t)[-x(t) + f(x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), \cdots, x(t-\tau_m))]$$

得到了全局稳定性的简单判别准则.

**关键词**：时滞方程；振动；全局吸引.

**分类号**：AMS(2000) 34K20/CLC O175.13

**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)02-0295-04

## 1　引　言

近年来，不少文献[1,2,3]对动物体内红血球补充模型：

$$\dot{N}(t) = \mu N(t) + Pe^{-rN(t-\tau)} \quad t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

进行了讨论，其中：$\mu, P, r, \tau \in (0, +\infty)$，记 $N^*$ 为所考虑方程唯一的正平衡点. 文[1]证明了当 $rN^*(1-e^{\mu\tau})<1$ 时，$N^*$ 是(1.1)的全局吸引子. 文[2]考虑了较广泛的一类方程：

$$\dot{N}(t) = \mu N(t) + \sum_{i=0}^{m} P_i e^{-rN(t-\tau_i)} \quad t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

其中 $\mu, r, P_i, \tau_i \in [0, +\infty)(i=0,1,2,\cdots,m)$；$P_m>0$，并证明了当

$$rN^*(1-e^{\mu\tau}) < 1 + \frac{e^{\mu\tau}}{rN^*}$$

时，正平衡点 $N^*$ 是(1.2)的全局吸引子. 其中 $\tau = \max_{0\leqslant i\leqslant m}\{\tau_i\}$. 注意到上述条件中 $N^*$ 是超越方程的根不易计算，使其应用受到限制，因而有必要寻求不含有 $N^*$ 的条件，保证方程解的全局稳定性. 文[3]考虑了方程：

$$\dot{N}(t) = r(t)(\mu N(t) + e^{-\sum_{i=0}^{m} r_i N(t-\tau-i)}) \quad t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

其中 $r(t) \in C([0,+\infty),(0,+\infty))$，$\mu>0, r_i, \tau_i \in [0,+\infty)$ $(i=0,1,2,\cdots,m)$. 证明了当：

$$\int_{t-\tau}^{t} r(s)\mathrm{d}s \leqslant B < +\infty, \quad \int^{\infty} r(s)\mathrm{d}s = \infty$$

* 收稿日期：1999-01-13

基金项目：国家自然科学基金资助项目(19871005)

作者简介：赵久利(1968- )，男，河北乐亭人，讲师.

时方程的正平衡点 $N^*$ 是全局吸引子.我们考虑一类更广泛的模型

$$\dot{x}(t) = r(t)[-x(t) + f(x(t-\tau_1),(x(t-\tau_2),\cdots,(x(t-\tau-m))], \tag{1.4}$$

其中 $\tau_i \in R^+,(i=1,2,\cdots,m), r \in C(R^+,(0,+\infty)), f \in C(R_+^m,(0,+\infty)), R^+=[0,+\infty), R_+^m=\prod_{i=1}^{m} R^+, f_i \leqslant 0\ (1 \leqslant i \leqslant m)$.

本文得到如下结果

**定理** 记 $\tau=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant m}\{\tau_i\}$,若

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_{t-\tau}^{t} r(s)\mathrm{d}s = B < \infty, \quad \int^{\infty} r(s)\mathrm{d}s = \infty \tag{H}$$

成立,则(1.4)的正平衡点 $x^*$ 是全局吸引子.

## 2 定义及引理

**定义 1** 设 $x^*$ 是方程(1.4)的唯一正平衡点.方程(1.4)关于 $x^*$ 振动是指对(1.4)所有解 $x(t)$,总有 $x(t)-x^*$ 有任意大的零点.

**定义 2** 方程(1.4)的正平衡点 $x^*$ 是全局吸引子是指对任意 $\varphi\in C([-\tau,0],R^+)$,方程(1.4)满足初始条件

$$x_0 = \varphi \tag{C}$$

的解 $x(t)$,总有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=x^*$.

显然,作为全局吸引子的正平衡点,必是唯一正平衡点.

**引理 1** 满足(C)的方程(1.4)的解 $x(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 上存在,且为有界正解.

**证明** 由(1.4)知

$$(x(t)e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s})' = r(t)f(x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),\cdots,x(t-\tau_m))e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}. \tag{2.1}$$

将上式对 $t$ 从 $k\tau$ 到 $t$ 积分,$(k\tau\leqslant t\leqslant(k+1)\tau, k\in Z)$ 得

$$x(t)e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s} = x(k\tau)e^{\int_0^{k\tau} r(s)\mathrm{d}s} + \int_{k\tau}^{t} r(t)f(x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),\cdots,x(t-\tau_m))e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t.$$

由 $\varphi$ 的定义知,$x(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 上存在且为正解.

再将(1.4)两端从 0 到 $t$ 积分,得

$$x(t)e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s} = x(0) + \int_0^t r(t)f(x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),\cdots,x(t-\tau_m))e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{\int_t^0 r(s)\mathrm{d}s} + \int_0^t r(t)f(x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),\cdots,x(t-\tau_m))e^{\int_t^t r(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t \\ &\leqslant x(0) + f(0,0,\cdots,0)(1-e^{\int_t^0 r(s)\mathrm{d}s}) \\ &\leqslant x(0) + f(0,0,\cdots,0). \end{aligned}$$

□

**引理 2** 若(1.4)关于 $x^*$ 非振动,则必有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=x^*$.

**证明** 分两种情形

1) 假设存在 $T\geqslant 0$,当 $t\geqslant T$ 时,$x(t)\geqslant x^*$.由 $f$ 的单调性及方程(1.4)知

$$\dot{x}(t) \leqslant r(t)[-x^* + f(x^*, x^*, \cdots, x^*)] = 0 \quad (t \geqslant T + t),$$

从而 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \bar{x} \geqslant x^*$，若 $\bar{x} > x^*$，则

$$\dot{x}(t) = r(t)[-\bar{x} + f(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})] \leqslant r(t)[-x^* + f(x^*, x^*, \cdots, x^*)] = 0.$$

于是

$$x(t) = x(T + \tau) + \int_{T+\tau}^{t} r(s)\mathrm{d}s(-\bar{x} + f(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})).$$

由此知，当 $t \to +\infty$ 时，$x(t) \to -\infty$，与假设矛盾. 故 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$.

2) 假设存在 $T \geqslant 0$，当 $t \geqslant T$ 时 $x(t) \leqslant x^*$.

类似可证 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$.

**引理 3** 设 $Q$ 是(1.4)的解 $x(t)$ 的一个极值点，若满足下述条件之一

(1) $x(Q) > x^*$；

(2) $x(Q) < x^*$，

则存在 $P \in (Q-\tau, Q)$，使得 $x(P) = x^*$.

**证明** 只证(1). 易知 $\dot{x}(Q) = 0$，于是由方程(1.4)知

$$f(x(Q-\tau_1), x(Q-\tau_2), \cdots, x(Q-\tau_m)) = x(Q) > x^* = f(x^*, x^*, \cdots, x^*).$$

由 $f$ 的单调性知，必存在 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 使得 $x(Q-\tau_i) < x^*$. 再由 $x(t)$ 的连续性，知引理成立.

## 3 定理的证明

分两种情形

(1) 若方程的解关于 $x^*$ 非振动，则由引理 2 知结论成立.

(2) 若方程的解关于 $x^*$ 振动. 由引理 1 解的有界性知

$$\limsup_{t\to+\infty} x(t) = \beta, \quad \liminf_{t\to+\infty} x(t) = \alpha,$$

从而对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，当 $t > T$ 时，$\alpha_1 = \alpha - \varepsilon < x(t) < \beta + \varepsilon = \beta_1$. 于是

$$\dot{x}(t) + r(t)x(t) \leqslant r(t)f(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1), \tag{3.1}$$

$$\dot{x}(t) + r(t)x(t) \geqslant r(t)f(\beta_1, \beta_1, \cdots, \beta_1). \tag{3.2}$$

由于 $x(t)$ 振动，则总可取任意大的极值点 $Q$ 及极小值点 $W$，使得

$$x(Q) > x^*, \quad x(W) < x^*.$$

再由引理 3 知：存在 $P \in (Q-\tau, Q)$，$\bar{P} \in (W-\tau, W)$，使得 $x(P) = x(\bar{P}) = x^*$.

对(3.1)两边从 $P$ 到 $Q$ 积分，得

$$\begin{aligned} x(Q) &\leqslant x^* e^{\int_Q^P r(s)\mathrm{d}s} + \int_P^Q r(s)f(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1)e^{\int_Q^t r(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \\ &= x^* e^{\int_Q^P r(s)\mathrm{d}s} + f(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1)(1 - e^{\int_Q^P r(s)\mathrm{d}s}) \\ &= (x^* - f(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1))e^{\int_Q^P r(s)\mathrm{d}s} + f(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1). \end{aligned}$$

注意到 $x^* - f(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1) < 0 e^{-\int_P^Q r(s)\mathrm{d}s} > e^{-B}$，从而 $x(Q) \leqslant x^* e^{-B} + (1 - e^{-B})f(\alpha_1, \alpha_1, \cdots,$

$\alpha_1$)，而 $\beta = \sup\{x(Q)\,|\,Q$ 是极值点，$x(Q) > x^*\}$，于是由 $Q$ 及 $\epsilon$ 的任意性知

$$\beta \leqslant x^* e^{-B} + (1 - e^{-B}) f(\alpha, \alpha, \cdots, \alpha), \tag{3.3}$$

同理

$$\alpha \leqslant x^* e^{-B} + (1 - e^{-B}) f(\beta, \beta, \cdots, \beta). \tag{3.4}$$

再由 $f$ 的单调性及反函数的性质知，(3.3)，(3.4)唯一确定 $\alpha=\beta$，综上定理成立.

## 4 推论

**推论** 如果方程

$$\dot{N}(t) = r(t)(\mu N(t) + \sum_{j=1}^{n} P_j \exp(-\sum_{i=1}^{m} r_{ij} x(t - \tau_{ij}))) \quad t \geqslant 0 \tag{4.1}$$

其中 $\mu, P_j, r_{ij}, \tau_{ij} \in (0, +\infty)$，$(i,j) \in I \times J = \{1,2,\cdots,m\} \times \{1,2,\cdots,n\}$，$r \in C(R^+, (0, +\infty))$，满足(H)，其中 $\tau = \max\{\tau_{ij}\,|\,(i,j) \in I \times J\}$，则方程(4.1)的正平衡点 $N^*$ 是全局吸引子.

**证明** 易验证(4.1)满足定理条件，故由定理知上推论成立.

**注** 推论包含了文[3]的结果.

**参考文献：**


[1] LI Jing-wen. *Asymptotic behavior of a delay differential mode* [J]. J. Bio. Math., 1994, **9**(1): 91—95

[2] 李经文. 带偏差变元时滞微分方程的全局吸引性 [J]. 生物数学学报, 1995, **10**(4): 122—128.
LI Jing-wen. *Global attractiveness of a delay differential equation with deviation arguments* [J]. J. Bio. Math., 1995, **10**(4): 122—128. (in Chinese)

[3] 刘玉记. 一类非线性泛函微分方程的全局吸引性 [J].（待发表）.
LIU Yu-ji. *Global attractiveness of a class of nonlinear functional equations* [J]. (to appear)


# Global Stability of Nonautonomous Delay Differential Equations


ZHAO Jiu-li[1], GE Wei-gao[2]

(1. Dept. of Fundamental Courses, Artilery Command Academy, Xuanhua 075100, China;
2. Dept. of Appl. Math., Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)



**Abstract**: The authors consider a class of nonautonomous delay differential equations

$$\dot{x}(t) = r(t)[-x(t) + f(x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \cdots, x(t - \tau_m))].$$

Simple criteria of global stability are obtained.



**Key words**: delay equation; global attraction.