第22卷第2期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 2
2002年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2002

具无限时滞的差分方程的一致渐近稳定性*

陈 武 华[1,2]

(1. 广西民族学院数学与计算机科学系，广西 南宁 530006；
2. 华中科技大学控制科学与控制工程系，湖北 武汉 430074)

摘　要：本文考虑了如下形式的具无限时滞的差分方程 $x(n+1)-x(n)=F(n,x_n),n\in Z^+$，$F:Z^+\times C_d(M)\to R$，这里 $C_d(M)=\{\varphi:Z^-\to R\mid \max\limits_{m\in Z^-}|\varphi(m)|\leqslant M\}$，获得了零解一致稳定与一致渐近稳定的充分条件.

关键词：差分方程；无限时滞；一致渐近稳定性.

分类号：AMS(2000) 39A12/CLC O175.7，O175.13

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2002)02-0299-08

1 引 言

设 Z,Z^+,Z^- 分别表示整数集、非负整数集、非正整数集，对于整数 $n,m,n<m$，定义 $Z(n)=\{n,n+1,\cdots\}$，$Z(n,m)=\{n,n+1,\cdots,m\}$. 考虑无限时滞差分方程

$$x(n+1)-x(n)=F(n,x_n),\quad n\in Z^+,\tag{1.1}$$

这里 $F:Z^+\times C_d(M)=\{\varphi:Z^-\to R\mid \|\varphi\|=\max\limits_{m\in Z^-}|\varphi(m)|\leqslant M\}$，$x_n$ 定义为 $x_n(m)=x(n+m)$，$m\in \mathbf{Z}^-$. 记 $x(n)=x(n,n_0,\varphi)$ 为方程(1.1)过 (n_0,φ) 在 $Z(n_0,n_0+N)$，$N\in\mathbf{Z}^+$ 上的一个解，若 $x(n)$ 满足(1.1)且 $x_{n_0}=\varphi$.

定义　方程(1.1)的零解称为

(i) 一致稳定，若对任一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使得由 $n\geqslant n_0\geqslant 0$，$\|\varphi\|<\delta$ 蕴含 $|x(n,n_0,\varphi)|<\varepsilon$.

(ii) 一致渐近稳定性，若(1.1)的零解一致稳定且存在 $\delta_0>0$，使得对任一 $\varepsilon>0$，存在 $T(\varepsilon)\in\mathbf{Z}^+$，由 $\|\varphi\|<\delta_0,n_0\geqslant 0,n\in Z(n_0+T)$ 蕴含 $|x(n,n_0,\varphi)|<\varepsilon$.

当方程(1.1)只具有有限时滞时，已有很多文献(如[1]－[5])对其稳定性作了研究. 但对于具有无穷时滞或 Volterra 型差分方程稳定性问题研究较少. 本文将考虑方程(1.1)为一类无限时滞差分方程情形零解稳定性问题. 本文的结果可以看成 Krisztin[6] 关于无限时滞微分方程的结果在离散情形的推广.

本文设 $F(n,\varphi)$ 满足

* 收稿日期：1999-01-11
作者简介：陈武华(1967-)，男，江苏溧水人，副教授，在读博士生.

$$-\sum_{i=1}^{\infty}b(i)\max_{m\in Z(-k(i),0)}(\varphi(m))\leqslant F(n,\varphi)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}b(i)\max_{m\in Z(-k(i),0)}(-\varphi(m)),\ (n,\varphi)\in Z^{+}\times C_d(M),\tag{1.2}$$

或者

$$-\sum_{i=1}^{\infty}b(i)\max\{0,\max_{m\in Z(-k(i),0)}(\varphi(m))\}\leqslant F(n,\varphi)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}b(i)\max\{0,\max_{m\in Z(-k(i),0)}(-\varphi(m))\},\ (n,\varphi)\in Z^{+}\times C_d(M),\tag{1.3}$$

其中 $k,b:Z(1)\to[0,\infty)$. 且 $k(1)<k(2)<\cdots<k(n)<\cdots$.

本文主要结果如下：

定理 1 设(1.2)成立

(i) 若 $\sum_{i=1}^{\infty}b(i)(k(i)+1)\leqslant\frac{3}{2}$,则(1.1)的零解一致稳定.

(ii) 若 $\sum_{i=1}^{\infty}b(i)(k(i)+1)<\frac{3}{2}$,则(1.1)的零解一致渐近稳定.

定理 2 设(1.3)成立

(i) 若 $\sum_{i=1}^{\infty}b(i)(k(i)+1)\leqslant 1$,则(1.1)的零解一致稳定.

(ii) 若 $\sum_{i=1}^{\infty}b(i)(k(i)+1)<1$ 且对任意 $T\in Z^{+}$ 及 $c\in R-\{0\}$, $\max_{m\in Z(-(T+1),0)}|\varphi_n(m)-c|\to 0,n\to\infty$,蕴含着 $F(n,\varphi_n)$ 并不收敛于零,则(1.1)的零解一致渐近稳定.

2 主要结果的证明

以下记 $\mu_0=\sum_{j=1}^{\infty}b(j)$, $\mu_1=\sum_{j=1}^{\infty}b(j)(k(j)+1)$, $N_0=[\frac{1}{\mu_0}]$, $[\cdot]$表示取最大整数部分函数. 不妨设 $k(i)\geqslant 1,i\in Z(1)$.

引理 1 设(1.2)及 $\mu_1\leqslant\frac{3}{2}$ 或者(1.3)及 $\mu_1\leqslant 1$ 成立. 若 $|x(n)|>\|x_{n-1}\|$, $n\in Z(n_0+N_0+1)$,则

$$x(i)x(n)\geqslant 0,\ i\in Z(n_0+N_0+1,n)\tag{2.1}$$

证明 不妨设 $x(n)>0$. 记 $x(n)=\varepsilon$. 若(2.1)不成立,则存在 $n_1\in Z(n_0+N_0+2)$,使得 $x(n_1-1)<0$,而 $x(i)>0,i\in Z(n_1,n)$. 从而存在 $\theta\in(0,1]$ 使得

$$x(n_1-1)=-\theta(x(n_1)-x(n_1-1)).$$

由(1.1),(1.2)或(1.3)得 $|x(i+1)-x(i)|<\sum_{i=1}^{\infty}b(i)\varepsilon=\mu_0\varepsilon$,从而

$$\varepsilon=x(n)=x(n_1-1)+\sum_{i=n_1-1}^{n-1}(x(i+1)-x(i))$$

$$=(1-\theta)(x(n_1)-x(n_1-1))+\sum_{i=n_1}^{n}(x(i+1)-x(i))$$

$$< (n - n_1 + 1 - \theta)\mu_0\varepsilon,$$

于是

$$n - n_1 + 1 - \theta > \frac{1}{\mu_0}. \tag{2.2}$$

记 $n_2 = n - N_0$，则 $n_2 \geqslant n_1$. 由 $N_0 \leqslant \frac{1}{\mu_0}, N_0 + 1 > \frac{1}{\mu_0}$ 及(2.2)，存在 $\eta \in [0,1)$ 使得 $N_0 + \eta\lambda(n_2 - 1) = \frac{1}{\mu_0}$. 其中 $\lambda(i) = 1, i \in Z(n_1, n_1 - 1), \lambda(n_1 - 1) = 1 - \theta$.

下面估计 $x(i)$，当 $i \in Z(n_2, n-1)$ 时

$$x(i) = x(n) - \sum_{j=i}^{n-1}(x(j+1) - x(j)) > \varepsilon - \sum_{j=i}^{n-1}\mu_0\varepsilon = \varepsilon(1 - \mu_0(n-i)).$$

当 $i \in Z(n_0 + 1, n_1 - 1)$ 时

$$\begin{aligned} x(i) &= x(n_1 - 1) - \sum_{j=i}^{n_1-2}(x(j+1) - x(j)) \\ &= -\theta(x(n_1) - x(n_1 - 1)) - \sum_{j=i}^{n_1-2}(x(j+1) - x(j)) \\ &> -\mu_0\varepsilon\theta - \mu_0\varepsilon(n_1 - 1 - i) = -\mu_0\varepsilon(\theta + n_1 - 1 - i), \end{aligned}$$

令 $\rho(i) = \begin{cases} \varepsilon(1 - \mu_0(n-i)),\ i \in Z(n_2, n-1) \\ 0,\ i \in Z(n_1, n_2 - 1) \\ -\mu_0\varepsilon\min\{\frac{1}{\mu_0}, \theta + n_1 - 1 - i\},\ i \leqslant n_1 - 1 \end{cases}$. 易见 $x(i) > \rho(i)$. 若(1.2)成立，则

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n_1 - 1) + \sum_{i=n_1-1}^{n-1}(x(i+1) - x(i)) = \sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)(x(i+1) - x(i)) \\ &= \sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)F(i, x_i) \leqslant \sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)(\sum_{j=1}^{\infty}b(j)\max_{m\in Z(-k(j),0)}(-x(m+i))) \\ &< -\sum_{j=1}^{\infty}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)\rho(i - k(j)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

若(2.3)成立，则

$$x(n) < \sum_{j=1}^{\infty}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)\max\{0, -\rho(i - k(j))\}. \tag{2.3$'$}$$

下面分两种情况讨论

情形 1 $N_0 \leqslant k(1)$.

由(2.3)或(2.3)$'$，

$$\begin{aligned} x(n_3) &< \mu_0\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)\min\{\frac{1}{\mu_0}, n_1 - 1 - i + k(j) + \theta\} \\ &\leqslant \mu_0\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)\min\{\frac{1}{\mu_0}, k(j) + 1 - \sum_{m=n_1-1}^{i}\lambda(m)\} \\ &\leqslant \mu_0\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}b(j)\{\frac{1}{\mu_0}\sum_{i=n_1-1}^{n_2-2}\lambda(i) + \frac{1-\eta}{\mu_0}\lambda(n_2 - 1) + \eta\lambda(n_2 - 1)(k(j) + 1 - \sum_{m=n_1-1}^{n_2-1}\lambda(m)) + \end{aligned}$$

$$\sum_{i=n_2}^{n-1}\lambda(i)(k(j)+1-\sum_{m=n_1-1}^{n_2-1}\lambda(m)-\sum_{m=\lambda_2}^{i}\lambda(m))\}$$

$$=\mu_0\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}b(j)\{\frac{1}{\mu_0}\sum_{i=n_1-1}^{n_2-2}\lambda(i)-\frac{\eta}{\mu_0}\lambda(n_2-1)+\eta\lambda(n_2-1)(k(j)+1)-$$

$$\eta\lambda(n_2-1)\sum_{m=n_1-1}^{n_2-1}\lambda(m)+N_0(k(j)+1-\sum_{m=n_1-1}^{n_2-1}\lambda(m))-\frac{1}{2}N_0(N_0+1)\}$$

$$=\mu_0\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}b(j)\{\sum_{i=n_1-1}^{n_2-2}\lambda(i)(\frac{1}{\mu_0}-\eta\lambda(n_2-1)-N_0)-\frac{1}{\mu_0}\eta\lambda(n_2-1)+$$

$$(k(j)+1)(\eta\lambda(n_2-1)+N_0)-\frac{1}{2}N_0(N_0+1)\}$$

$$=\mu_0\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}b(j)\{-\frac{1}{\mu_0}(\frac{1}{\mu_0}-N_0)+(k(j)+1)\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{2}N_0(N_0+1)\}$$

$$\leqslant\varepsilon\{-1+\sum_{j=1}^{\infty}b(j)(k(j)+1)+N_0\mu_0-\frac{1}{2}(N_0\mu_0)^2\}$$

$$\leqslant\varepsilon\{-1+\mu_1+\frac{1}{2}\}\leqslant\varepsilon.$$

于是与 $x(n)<\varepsilon$ 矛盾.

情形 2 $N_0\geqslant k(1)+1$.

此时,存在 $j_0\geqslant1$ 使得 $k(j_0+1)\geqslant N_0\geqslant k(j_0)+1$,若(2.3)成立,则

$$x(n)<-\sum_{j=1}^{j_0}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)\rho(i-k(j))-\sum_{j=j_0+1}^{\infty}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)\rho(i-k(j))=I_1+I_1$$

$$I_1=-\sum_{j=1}^{j_0}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)\rho(i-k(j))$$

$$=-\sum_{j=1}^{j_0}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n_1+k(j)-1}\lambda(i)\rho(i-k(j))-\sum_{j=1}^{j_0}b(j)\sum_{i=n_2+k(j)}^{n-1}\lambda(i)\rho(i-k(j))$$

$$=I_{11}+I_{12}.$$

若(2.3)′成立,则

$$x(n)<-\sum_{j=1}^{j_0}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n_1+k(j)-1}\lambda(i)\rho(i-k(j))-\sum_{j=j_0+1}^{\infty}b(j)\sum_{i=n_1-1}^{n-1}\lambda(i)\rho(i-k(j))=I_{11}+I_2.$$

下面估计 I_{11},I_{12},I_2,对于 I_2,类似于情形 1,可证

$$I_2\leqslant\varepsilon\sum_{j=j_0+1}^{\infty}b(j)(k(j)+1-\frac{1}{2\mu_0}),I_{11}\leqslant\varepsilon\mu_0\sum_{j=1}^{j_0}b(j)(\frac{1}{2}k(j)(k(j)+1)+\frac{1}{4}),$$

$$I_{12}=-\varepsilon\sum_{j=1}^{j_0}b(j)\{-\frac{\mu_0}{2}N_0(N_0+1)+N_0-k(j)+\frac{\mu_0}{2}k(j)(k(j)+1)\}.$$

因此,若(2.3)成立,注意到 $N_0\geqslant1$ 及 $\frac{1}{\mu_0}-1\leqslant N_0\leqslant\frac{1}{\mu_0}$.

$$x(n)<I_1+I_2\leqslant \varepsilon\sum_{j=j_0+1}^{\infty}b(j)(k(j)+1-\frac{1}{2\mu_0})-$$

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{j_0}b(j)\{N_0+1-\frac{1}{2\mu_0}-\frac{\mu_0}{4}-\frac{\mu_0}{2}N_0(N_0+1)\}$$

$$\leqslant\varepsilon-\varepsilon\sum_{j=1}^{j_0}b(j)(N_0+1-\frac{1}{2\mu_0}-\frac{\mu_0}{2}N_0(N_0+2))\leqslant\varepsilon.$$

若(2.3)′成立，由上面的证明可知

$$x(n)<\varepsilon(\mu_1-\frac{1}{2})+(-I_{12}).$$

由于当 $0\leqslant j\leqslant j_0$ 时，$\frac{1}{\mu_0}\geqslant N_0\geqslant k(j)+1$

$$-I_{12}\leqslant \varepsilon\sum_{j=1}^{j_0}b(j)(-\frac{\mu_0}{2}N_0(N_0+1)+N_0-k(j)+\frac{k(j)}{2})$$

$$\leqslant \varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}b(j)(-\frac{\mu_0}{2}N_0(N_0+1)+N_0)$$

$$\leqslant \varepsilon(-\frac{(\mu_0N_0)^2}{2}+\mu_0N_0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $x(n)<\mu_1\varepsilon\leqslant\varepsilon$. 矛盾.

定理 1 与定理 2 的一致稳定性证明 记 $H_0=(1+\mu_1)(1+\mu_0)^{N_0+1}$，设 $\|x_{n_0}\|\leqslant\varepsilon$，其中 $\varepsilon H_0\leqslant M$. 由(1.2)或(1.3)，不难证明

$$|x(n_0+i)|\leqslant((1+\mu_0)^i\varepsilon,\quad i\in Z(1,N_0+1).\tag{2.4}$$

下证对任意 $n\in Z(n_0+N_0+2)$，

$$\|x_n\|-\|x_{n-1}\|\leqslant\sum_{j=k^{-1}(n_1)+1}^{\infty}b(j)\|x_{n_0+N_0+1}\|,\tag{2.5}$$

其中 $n_1=n-n_0-N_0+2$.

实际上，若 $|x_n|\leqslant\|x_{n-1}\|$，则 $\|x_n\|=\|x_{n-1}\|$，从而(2.5)成立. 若 $|x_n|>\|x_{n-1}\|$，由引理 1，对于 $i\in Z(n_0+N_0+1,n)$ 有 $x(i)x(n)\geqslant 0$. 不妨设 $x(n)\geqslant 0$. 于是

$$\|x_n\|-\|x_{n-1}\|\leqslant x(n)-x(n-1)=F(n-1,x_{n-1})$$

$$=(\sum_{j=1}^{k^{-1}(n_1)}+\sum_{j=k^{-1}(n_1)+1}^{\infty})b(j)\max\{0,\max_{m\in Z(-k(j),0)}(-x(m+n-1))\}$$

$$=\sum_{j=k^{-1}(n_1)+1}^{\infty}b(j)\max\{0,\max_{m\in Z(n-1-k(j),n_0+N_0+1)}(-x(m))\}$$

$$\leqslant\sum_{j=k^{-1}(n_1)+1}^{\infty}b(j)\|x_{n_0+N_0+1}\|,$$

从而总有(2.5)成立. 于是

$$\sum_{i=n_0+N_0+2}^{n}(\|x_i\|-\|x_{i-1}\|)\leqslant\sum_{i=n_0+N_0+2}^{n}\sum_{j=k^{-1}(n_1)+1}^{\infty}b(j)\|x_{n_0+N_0+1}\|$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=n_0+N_0+2}^{k(j)+n_0+N_0+2} b(j) \| x_{n_0+N_0+1} \| \leqslant \mu_1 \| x_{n_0+N_0+1} \| .$$

于是

$$\| x_n \| \leqslant (1+\mu_1) \| x_{n_0+N_0+1} \| \leqslant (1+\mu_1)(1+\mu_0)^{N_0+1} \varepsilon.$$

由上式不难得知，(1.1)的零解一致稳定.

引理 2 设 $\delta_0 > 0, H_0\delta_0 \leqslant M, \varepsilon_0 \in (0, H_0\delta_0)$，(1.2) 及 $\mu_1 \leqslant \frac{3}{2}$ 成立或者(1.3)、(1.4) 及 $\mu_1 \leqslant 1$ 成立. 则存在 $N_1 \in Z^+$，使得对(1.1) 的任一满足 $\| x_{n_0} \| \leqslant \delta_0$ 的解 $x(n)$，当 $i \in Z(n_0)$，$|x(i+N_1)| \geqslant \varepsilon_0$ 蕴含着存在 $j_0 \in Z(i+1, i+N_1)$ 使得

$$x(j)x(i+N_1) \geqslant 0,\ j \in Z(j_0, i+N_1) \text{ 而 } x(j_0-1)x(i+N_1) < 0. \tag{2.6}$$

证明 若不存在上述 N_1，则存在整数列 $\{T_m\}, T_m \to \infty$ 及解序列 $\{x^m\}$，整数列 $\{n_m\}$ 与 $\{S_m\}$，使得 $\| x^m_{n_m} \| \leqslant \delta_0, S_m \in Z(n_m), x^m(i)x^m(S_m - T_m) \geqslant 0, i \in Z(S_m, S_m + T_m), |x^m(S_m + T_m)| \geqslant \varepsilon_0$. 由一致稳定性的证明，$|x^m(i)| \leqslant H_0\delta_0, i \in Z(n_m)$.

对于 $a, b \in Z^+, b = a + i_0, x: Z(a,b) \to R$，记 $V[a,b]x = \sum_{i=1}^{i_0} |x(a+i) - x(a+i-1)|$，$V^+[a,b]x = \sum_{x(a+i) \geqslant x(a+i-1)} (x(a+i) - x(a+i-1))$，易证 $V[a,b]x = 2V^+[a,b]x - x(b) + x(a)$，$V[a,b]x = V[a,c]x + V[c,d]x$，若 $c \in Z(a,b)$.

下面分四步导出矛盾. 不失一般性，设 $x^m(S_m + T_m) > 0$.

第一步. 证明 $V^+[\tau, S_m + T_m]x^m \leqslant H_0\delta_0 \sum_{j=k^{-1}(\tau - S_m)+1}^{\infty} (k(j)+1)$，其中 $\tau \in Z(S_m, S_m + T_m)$.

第二步. 证明 $V[S_m, S_m + T_m]x^m \leqslant 2H_0\delta_0\mu_1 - \varepsilon_0 + H_0\delta_0 = H_1$.

由于第一步与第二步的证明比较简单，略去.

第三步. 证明对任意 $T \in \mathbf{Z}^+$，存在 $\{(S_m + [\frac{T_m}{2}], S_m + T_m)\}$ 的一个子区间列，及其中的点列 $\{t_m\}$，使得 $t_m - (T+1) \geqslant S_m + \frac{T_m}{2}, x(t_m + i) \to c \geqslant \varepsilon_0, i \in Z(-(T+1), 0), m \to \infty$.

对给定 $T \in \mathbf{Z}^+$，由于 $T_m \to \infty$，对充分大的 m 有 $[\frac{T_m}{2}] \geqslant m(T+1)$. 由于 $\sum_{i=0}^{m-1} V[S_m + T_m - (i+1)(T+1), S_m + T_m - iT]x^m = V[S_m, S_m + T_m]x_m \leqslant H_1$. 故存在 $i_0 \in Z(0, m-1)$，使得 $V[S_m + T_m - (i_0+1)(T+1), S_m + T_m - i_0(T+1)]x^m \leqslant \frac{H_1}{m}$. 现记 $y^m(s) = x^m(t_m + s), s \in Z(-(T+1), 0)$，其中 $t_m = S_m + T_m - i_0(T+1)$.

由于 $\{y^m(s)\}$ 在 $s \in Z(-(T+1), 0)$ 上一致有界，故存在一致收敛的子列，不妨仍记为 $\{y^m(s)\}$，使得 $\lim_{m\to\infty} y^m(s) = y(s), s \in Z(-T+1, 0)$. 断言 $y(s) \equiv$ 某常数 c，且 $c \geqslant \varepsilon_0$. 实际上，对任意 $s_1, s_2 \in Z(-(T+1), 0)$，

$$|y(s_1) - y(s_2)| = \lim_{m\to\infty} |y^m(s_1) - y^m(s_2)| \leqslant \lim_{m\to\infty} V[-(T+1), 0]y^m = 0.$$

下证 $c \geqslant \varepsilon_0$. 若 $c < \varepsilon_0$，则对某 $c_1, c < c_1 < \varepsilon_0$，对充分大的 m 有 $\max_{s \in Z(-(T+1), 0)} y^m(s) \leqslant c_1 < \varepsilon_0$，

于是对任意 $s_0 \in Z(-(T+1),0)$,

$$0<\varepsilon_0-c_1 \leqslant x^m(S_m+T_m)-y^m(s_0)=x^m(S_m+T_m)-x^m(S_m+T_m-i_0(T+1)-s_0)$$

$$\leqslant V^+[S_m+[\frac{T_m}{2}],S_m+T_m]x^m \leqslant H_0\delta_0 \sum_{j=k^{-1}([\frac{T_m}{2}]+1)}^{\infty} b(j)(k(j)+1) \to 0 \quad (m\to\infty),$$

矛盾.

第四步. 导出矛盾.

首先考虑(1.2)成立的情况. 取 $T \in Z^+$ 充分大,使得 $(H_0\delta_0+\frac{\varepsilon_0}{2})\sum_{i=k^{-1}(T)+1}^{\infty} b(i) \leqslant \frac{\varepsilon_0\mu_0}{4}$,对此 T,由第三步,存在 $\{t_m\}$,使得 $x^m(t_m+i)\to c \geqslant \varepsilon_0, m\to\infty, i\in Z(-(T+1),0)$,从而对充分大的 m 有 $x^m(t_m)-x^m(t_m-1)\to 0$ 且 $x^m(t_m+i)>\frac{\varepsilon_0}{2}, i\in Z(-(T+1),0)$. 于是

$$x^m(t_m)-x^m(t_m-1) \leqslant (\sum_{i=1}^{k^{-1}(T)}+\sum_{i=k^{-1}(T)+1}^{\infty})b(i)\max_{s\in Z(-k(i),0)}(-x^m(t_m-1+s))$$

$$=-\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{k^{-1}(T)} b(i)+H_0\delta_0\sum_{i=k^{-1}(T)+1}^{\infty} b(i)$$

$$=-\frac{\varepsilon_0}{2}\mu_0+(H_0\delta_0+\frac{\varepsilon_0}{2})\sum_{i=k^{-1}(T)+1}^{\infty} b(i)$$

$$\leqslant -\frac{\varepsilon_0}{4}\mu_0.$$

令 $m\to\infty$,矛盾.

若(1.3)及(1.4)成立,由第三步 3, $\forall\, T\in Z^+$,存在 $\{t_m\}$, $t_m\to\infty$,使 $x^m(t_m)-x^m(t_m-1)\to 0, x^m(t_m-i)\to c\geqslant\varepsilon_0>0, m\to\infty$. 但是由(1.4), $F(t_m-1,x^m_{t_m-1})$ 并不收敛于零,矛盾.

引理 3 设 $\delta_0>0, H_0\delta_0<M, \varepsilon_0\in(0,H_0\delta_0)$,(1.2)及 $\mu_1<\frac{3}{2}$ 或者(1.3),(1.4)及 $\mu_1<1$ 成立,则存在 $\alpha_0>0$ 及 $N_2\in Z^+$,使得对任意 $\alpha\in[0,\alpha_0], N_2'\in Z(N_2)$,由 $\|x_{n_0}\|\leqslant\delta_0, n_1\in Z(n_0), n\in Z(n_1+2N_2'), |x(n)|\geqslant\varepsilon_0, |x(i)|\leqslant(1+\alpha)|x(n)|, i\in Z(n_1,n)$,可推出 $x(i)x(n)\geqslant 0, i\in Z(n_1+2N_2',n)$.

注意到 $\mu_1<\frac{3}{2}$ 或 $\mu_1<1$,利用反证法,仿照引理 1 的证明,不难完成引理 3 的证明,限于篇幅,此处从略.

定理 1 与定理 2 的一致渐近稳定性证明 由一致稳定性证明,当 $\|x_{n_0}\|\leqslant\delta, H_0\delta_0\leqslant M$ 时,

$$|x_n|\leqslant H_0\delta,\ n\in Z(n_0). \tag{2.7}$$

下证在此 δ 下,(1.1)的零解一致吸引. 否则,存在 $\varepsilon_0\in(0,H_0\delta)$,整数列 $\{S_m\},\{T_m\}$ 及(1.1)定义在 $Z\{S_m\}$ 上的解序列 $\{x^m\}$ 满足

$$\|x^m_{S_m}\|\leqslant\delta, T_m\to\infty, \text{而 } |x^m(S_m+T_m)|\geqslant\varepsilon_0.$$

选取 k,m 使得 $(1+\alpha_0)^k\varepsilon_0>H_0\delta, T_m>k(N_1+2N_2)$. 记 $\tau_0=S_m+T_m$. 由于 $|x^m(\tau_0)|\geqslant\varepsilon_0$,由引理 2,存在 $j\in Z(\tau_0+N_1+1,\tau_0)$ 使得 $x^m(i)x^m(\tau_0)\geqslant 0, i\in Z(j_1,\tau_0)$,而 $x^m(j_1-1)x^m(\tau_0)$

< 0. 由引理 3，存在 $\tau_1 \in Z(\tau_0 - N_1 - 2N_2, \tau_0 - 1)$，使得 $|x^m(\tau_1)| > (1+\alpha_0)|x^m(\tau_0)| \geq (1+\alpha_0)\varepsilon_0$. 重复上述步骤，存在 $\tau_k \in Z(\tau_{k-1} - N_1 - 2N_2, \tau_{k-1}) \subset Z(S_m, S_m + T_m)$，使得 $|x^m(\tau_k)| > (1+\alpha_0)|x^m(\tau_{k-1})| = (1+\alpha_0)^k |x^n(\tau_0)| > (1+\alpha_0)^k \varepsilon_0 > H_0\delta_0$. 这与(2.7)矛盾.

参考文献：

[1] YU J S. *Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay* [J]. Computers Math. Appl., 1998, **36**(10—12): 203—210.

[2] ZHOU Z, ZHANG Q Q. *Uniform stability of nonlinear difference systems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **225**(2): 486—500.

[3] 陈武华. 一类非线性时滞差分方程的渐近稳定性 [J]. 应用数学, 1998, **11**(1): 55—60.
CHEN Wu-hua. *Asymptotic stability of certain nonlinear delay difference equation* [J]. Math. Appl., 1998, **11**(1): 55—60. (in Chinese)

[4] 陈武华. 具多个时滞的差分方程的稳定性 [J]. 广西科学, 2000, 7(3): 183—186.
CHEN Wu-hua. *Stability for difference equation with several delays* [J]. Guangxi Seiences, 2000, 7(3): 183—186. (in Chinese)

[5] 周 展, 庾建设. 非自治时滞差分方程的线性化渐近稳定性 [J]. 数学年刊(A 辑), 1998, **19**(3): 301—308.
ZHOU Zhan, YU Jian-she. *Linearization asymptotic stability of nonautonomous delay difference equation* [J]. Chin. Ann. of Math., Ser. A, 1998, **19**(3): 301—308. (in Chinese)

[6] KRISZTIN T. *On stability properties for one-dimensional functional differential equations* [J]. Funkcial. Ekvac., 1991, **34**: 241—256.

Uniformly Asymptotic Stability for a Class of Difference Equations with Infinite Delays

CHEN Wu-hua[1,2]

(1. Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. of Nationalities, Nanning 530006, China
2. Dept. of Cont. Sci. & Eng., Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Consider the following difference equation: $x(n+1) - x(n) = F(n, x_n), n \in \mathbf{Z}^+$, where $F: Z^+ \times C_d(M) \to R$, $C_d(M) = \{\varphi: Z^- \to R \mid \max_{m \in Z^-} |\varphi(m)| \leq M\}$. We obtain sufficient conditions for the uniform stability and uniformly asymptotic stability of the zero solution of the above equation.

Key words: difference equation; infinite delay; uniformly asymptotic stability.