第22卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 22 No. 2
2002年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2002

关于"度量和"的一个新结果*

杨世国
(安徽教育学院数学系，安徽 合肥 230061)

摘　要：本文建立了关于"度量和"的一个新的几何不等式，作为其特例可得到关于"度量和"的两个已知的重要几何不等式.

关键词：度量和；单形；体积；不等式.
分类号：AMS(2000) 51M16/CLC O186
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2002)02-0314-03

1 引　言

R. Alexander 提出了欧氏空间 E^m 或 Hilbert 空间 l^2 中的度量和之概念[1]，并建议在度量几何中应用度量加的方法可以行之有效地解决度量几何中的一些问题[2]. 文献[3,4,5]中应用度量加的方法卓有成效地解决了度量几何中的一些重要问题.

定义[1]　设 $\mathscr{A}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，$\mathscr{B}=\{Q_0,Q_1,\cdots,Q_n\}$ 是欧氏空间 E^m 或 Hilbert 空间 l^2 中的两个点集，则在欧氏空间 E^m 或 Hilbert 空间 l^2 中必存在一个点集 $\mathscr{D}=\{S_0,S_1,\cdots,S_n\}$，使得

$$|S_i-S_j|^2=|P_i-P_j|^2+|Q_i-Q_j|^2\quad(i,j=0,1,\cdots,n).$$

这个存在性由 I. J. Schoenberg 早就证明的. 称点集 $\mathscr{D}$ 是点集 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的度量和，记作 $\mathscr{D}=\mathscr{A}\dot{+}\mathscr{B}$.

考虑点集 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 与它们的度量和 $\mathscr{D}=\mathscr{A}\dot{+}\mathscr{B}$ 的某些不变量之间的联系是很自然的事. R. Alexander 提出[2]，如果 V,V',V'' 分别表示由点集 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{D}=\mathscr{A}\dot{+}\mathscr{B}$ 所生成的 n 维单形的体积，他猜想

$$V''^2\geqslant V^2+V'^2. \tag{1}$$

杨路、张景中教授在文献[3]中指出不等式(1)不成立，并建立了如下一个重要几何不等式

$$V''^{2/n}\geqslant V^{2/n}+V'^{2/n}, \tag{2}$$

等号成立当且仅当单形 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 相似.

* 收稿日期：1999-03-15
基金项目：安徽省教委科研基金资助项目(2000j1048)
作者简介：杨世国(1952-)，男，安徽明光人，教授.

设由点集 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{D}=\mathscr{A}\dotplus\mathscr{B}$ 所生成的 n 维单形中，经过点 P_i,Q_i,S_i 的高线长分别为 h_i,h_i',h_i''，杨路与张景中教授建立了另一重要不等式[4]

$$h_i''^2 \geqslant h_i^2 + h_i'^2 \quad (i=0,1,\cdots,n). \tag{3}$$

当单形 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 皆为正则单形时等号成立.

在点集 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{D}=\mathscr{A}\dotplus\mathscr{B}$ 中分别取 $k+1$ 个点 $P_{i_0},P_{i_1},\cdots,P_{i_k};Q_{i_0},Q_{i_1},\cdots,Q_{i_k};S_{i_0},S_{i_1},\cdots,S_{i_k}$，它们所生成的 k 维单形的 k 维体积分别为 $V_{i_0i_1\cdots i_k},V'_{i_0i_1\cdots i_k},V''_{i_0i_1\cdots i_k}$. 约定零维单形的零维体积为 1，$0!=1$，本文获得关于"度量和"的下述一类新的几何不等式.

定理 1 对任意非负整数 $k\in[0,n-1]$，有

$$\left(\frac{V''}{V''_{i_0i_1\cdots i_k}}\right)^{2/(n-k)} \geqslant \left(\frac{V}{V_{i_0i_1\cdots i_k}}\right)^{2/(n-k)} + \left(\frac{V'}{V'_{i_0i_1\cdots i_k}}\right)^{2/(n-k)} \quad (0\leqslant i_0<i_1<\cdots<i_k\leqslant n). \tag{4}$$

当k $=0$ 时，等号成立当且仅当单形 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 相似；当 $k\in[1,n-1]$ 时，若 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 皆为正则单形等号成立.

特别，若在定理 1 中取 $k=0$，便得不等式(2)；若在不等式(4)中取 $k=n-1$，并记 $V_{01\cdots i-1,i+1,\cdots n}=F_i,V'_{01\cdots i-1,i+1,\cdots n}=F_i',V''_{01\cdots i-1,i+1,\cdots n}=F_i''$，并利用单形的体积公式 $V=\frac{1}{n}F_ih_i$，$V'=\frac{1}{n}F_i'h_i',V''=\frac{1}{n}F_i''h_i''$，便得不等式(3). 由此可见不等式(4)包含了不等式(2)、(3).

为了证明定理 1，引用下面引理.

引理 1[6] 设 A,B 皆为 n 阶实正定矩阵，$A_k(B_k)$ 表示 $A(B)$ 的 k 阶顺序主子式，$C=A+B$，则

$$\left(\frac{|C|}{|C_k|}\right)^{1/(n-k)} \geqslant \left(\frac{|A|}{|A_k|}\right)^{1/(n-k)} + \left(\frac{|B|}{|B_k|}\right)^{1/(n-k)} \quad (k=0,1,\cdots,n-1). \tag{5}$$

这里约定 $|A_0|=1$. 当 $k=0$ 时不等式(5)即为 Minkowski 不等式

$$|A+B|^{1/n} \geqslant |A|^{1/n} + |B|^{1/n},$$

且等号成立当且仅当 $A=\lambda B$.

定理 1 的证明 先证不等式(4)当 $i_0=0$ 时成立. 令 $a_{ij}^2=|P_i-P_j|^2,a'^2_{ij}=|Q_i-Q_j|^2$，$a''^2_{ij}=|S_i-S_j|^2(i,j=0,1,\cdots,n)$，$p_{ij}^2=a_{i0}^2+a_{j0}^2-a_{ij}^2,p'^2_{ij}=a'^2_{i0}+a'^2_{j0}-a'^2_{ij},p''^2_{ij}=a''^2_{i0}+a''^2_{j0}-a''^2_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 记

$$A=(p_{ij}^2)_{i,j=1}^n,A'=(p'^2_{ij})_{i,j=1}^n,A''=(p''^2_{ij})_{i,j=1}^n,$$

则 A,A' 皆为 n 阶正定的实对称矩阵，且 $A''=A+A'$. 现对矩阵 A,A',A'' 作初等变换：首先将它们的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行调到第 $1,2,\cdots,k$ 行，然后再将它们的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列调到第 $1,2,\cdots,k$ 列，所得到的矩阵分别记为 $\widetilde{A},\widetilde{A'},\widetilde{A''}$，则 $\widetilde{A},\widetilde{A'}$ 皆为正定矩阵，且 $\widetilde{A''}=\widetilde{A}+\widetilde{A'}$. 利用单形的体积公式有

$$|\widetilde{A''}|=(n!V'')^2,|\widetilde{A'}|=(n!V')^2,|\widetilde{A}|=(n!V)^2. \tag{6}$$

$$|\widetilde{A''_k}|=(k!V''_{i_0i_1\cdots i_k})^2,|\widetilde{A'_k}|=(k!V'_{i_0i_1\cdots i_k})^2,|\widetilde{A_k}|=(k!V_{i_0i_1\cdots i_k})^2. \tag{7}$$

再利用引理 1 有

$$\left(\frac{|\widetilde{A''}|}{|\widetilde{A''_k}|}\right)^{1/(n-k)} \geqslant \left(\frac{|\widetilde{A}|}{|\widetilde{A_k}|}\right)^{1/(n-k)} + \left(\frac{|\widetilde{A'}|}{|\widetilde{A'_k}|}\right)^{1/(n-k)}. \tag{8}$$

将等式(6)、(7)代入(8)式便得所要证明的不等式(4),所以不等式(4)对 $i_0=0$ 成立.

对 $i_0\neq 0$,只要对单形 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{D}=\mathscr{A}^{*}+\mathscr{B}$ 的顶点重新编号,按上述方法可证明不等式(4)成立.可以验证,当 $k=0$ 时,(4)中等号成立当且仅当单形 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 相似;当 $k\in[1,n-1]$ 时,若 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 为正则单形(4)中等号成立.

参考文献:

[1] ALEXANDER R. *Metric averaging in Euclidean and Hilbert space* [J]. Pac. J. Math., 1979, **85**(1): 1—9.

[2] ALEXANDER R. *Metric Embeding Techniques Applied to Geometric Inequalities, in the Geometry of Metric and Linear Space* [M]. Ed. L. M. Kelly, Spring-Verlag. 1975: 57—65.

[3] 杨 路,张景中. 关于 Alexander 的一个猜想 [J]. 科学通报, 1982, **27**(7): 699—703.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *On Alexander's conjecture* [J]. Kexue Tongbao, 1982, **27**(7): 699—703. (in Chinese)

[4] 杨 路,张景中. 高维度量几何的两个不等式 [J]. 成都科技大学学报, 1981, (4): 63—70.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *Two geometric inequalities in higher dimetional metric space* [J]. J. Chengdu Univ. Sci. Tech., 1981, **4**: 63—70. (in Chinese)

[5] 杨 路,张景中. 度量和与 Alexander 对称化 [J]. 数学年刊(A), 1987, **8**(2): 242—253.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *Metric addition with Alexander symetry* [J]. Chinese Ann. of Math. Ser. A., 1987, **8**(2): 242—253. (in Chinese).

[6] FAN Ky. *Some inequalities concerning positive-definite Hermitian matrices* [J]. Proe. Cambridge Phil. Soc., 1955, **51**: 114—119.

A New Result on Metric Addition

YANG Shi-guo

(Dept. of Math., Anhui Educational Institute, Hefei 230061, China)

Abstract: In this paper, a new geometric inequality on metric addition is established. As special cases, we find two known important geometric inequalities.

Key words: metric addition; simplex; volume; inequality.