第22卷第3期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 3
2002年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2002

非线性微分系统解的有界性和周期解的存在性*

颜跃新 周正新

(扬州大学理学院数学系，江苏 扬州 225002)

摘 要：本文运用了比较新的手法，证明了非线性微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{a(x)}[c(y)-b(x)]\\ \dfrac{dy}{dt}=-a(x)[h(x)-e(t)]\end{cases}\tag{1}$$

(其中 $a(x),b(x),h(x),c(y),e(t)$ 为连续可微函数，$x,y\in R,t\in[0,+\infty)$，且 $a(x)>0$)解的有界性及周期解的存在性，并应用该结论讨论了强迫振动方程：

$$\ddot{x}+(f(x)+g(x)\dot{x})\dot{x}+h(x)=e(t)\tag{2}$$

(其中 $f(x),g(x)$ 为连续可微函数，$x\in R,h(x),e(t)$ 同上)解的有界性及周期解的存在性.

关键词：非线性；有界性；周期解.

分类号：AMS(2000) 34K15,34C10/CLC O175.12

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)03-0441-06

在文献[1—3]中曾研究了强迫振动方程(2)解的有界性，而该方程等价于微分系统(1)当 $c(y)=y,a(x)=\exp(\int_0^x g(u)du),b(x)=\int_0^x a(u)f(u)du$ 时的情形. 现在我们来讨论更一般的微分系统(1)，并记 $H(x)=\int_0^x a^2(u)h(u)du$.

定理1 若

1) $|e(t)|\leqslant m<+\infty,t\in[0,+\infty)$；

2) $\lim\limits_{|x|\to\infty}|b(x)|=+\infty$；

3) $c(y)=-c(-y),c'(y)>0(y\neq 0),\lim\limits_{|y|\to\infty}|c(y)|=+\infty$，且当 $y_2>y_1>0$ 时有

$$c(y_2)(y_2-y_1)-\int_{y_1}^{y_2}c(u)du\geqslant\omega[c(y_2)-c(y_1)]^{\alpha}(y_2-y_1)^{\beta};\tag{3}$$

4) 存在常数 $a>0$ 使得，当 $|x|\geqslant a$ 时有 $\mathrm{sign}(x)h(x)\geqslant 2m,\mathrm{sign}(x)b(x)>0$,

$$\mathrm{sign}(x)\frac{b'(x)}{H'(x)}\geqslant\gamma,\mathrm{sign}(x)\frac{q'(x)}{H'(x)}\geqslant\gamma,$$

* 收稿日期：1999-07-15
基金项目：江苏省教委计划指导性项目(99KJD110005)
作者简介：颜跃新(1958-)，男，副教授.

其中$\omega>0,\alpha,\beta$为常数；$q(x)=c^{-1}(\frac{b(x)}{2}),\gamma>(\frac{2^{\alpha}}{\omega})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}|b(\pm a)q(\pm a)|^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}$，则微分系统(1)的一切解正向有界.

证明 为了证明系统(1)解的有界性，我们只需在相平面xy上构造一个闭曲线Γ，使得系统(1)的任一轨线只要与Γ相交必整个含在Γ的内部区域里.

为此，记$m_1=\max\limits_{|x|\leqslant a}|h(x)|,m_2=\max\limits_{|x|\leqslant a}|b(x)|,m_3=\max\limits_{|x|\leqslant a}a^2(x),\Phi(y)=\int_0^y c(u)\mathrm{d}u$. 选取正数$b$，使得

$$b[c(b)-m_2]>2am_3[m_1+m], \tag{4}$$

则由条件2)，3)得，存在常数$\overline{A},A>a>0$使得$b(A)=c(2b),b(-\overline{A})=c(-2b)$.

闭曲线Γ由$n+\bar{n}+6$段曲线组成，具体构造如下：

过$P_0(a,-b)$作$\Gamma_0:x=a,-b\leqslant y\leqslant -q(a)$，由于在$\Gamma_0$上$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{a(x)}[c(y)-b(x)]<0$，从而方程组(1)的轨线与$\Gamma_0$相交时必从右向左穿入.

过$P_1(x_1,y_1)$作$\Gamma_1:\Phi(y)-c(b_1)y+H(x)=\Phi(-b_1)+c(b_1)b_1+H(x_1)$，这里$x_1=a$，$y_1=-b_1\overset{\Delta}{=}-q(a)$. Γ_1交$y=b_1$于$P_2(x_2,y_2)$，则

$$H(x_2)-H(x_1)=2b_1c(b_1)>0, \tag{5}$$

从而$x_2>x_1=a$，(由条件4))，$y_2=b_1$. 又$\frac{\mathrm{d}\Gamma_1}{\mathrm{d}t}|_{(1)}=-a(x)[h(x)(b(x)-c(b_1))+(c(b_1)-c(y))e(t)]<-2ma(x)[b(x)-2c(b_1)]$，在$\Gamma_1$上，$x\geqslant a,b(x)\geqslant b(a)=2c(b_1)$(由条件4))，所以$\frac{\mathrm{d}\Gamma_1}{\mathrm{d}t}|_{(1)}<0$. 即方程组(1)的轨线与$\Gamma_1$相交时从其下方往上方穿进.

过$P_2(x_2,y_2)$，作$\Gamma_2:\Phi(y)-c(b_2)y+H(x)=\Phi(b_1)-c(b_2)b_1+H(x_2)$，这里$b_2\overset{\Delta}{=}q(x_2)$，$b_1\leqslant y\leqslant b_2$，$\Gamma_2$与$y=b_2$相交于$P_3(x_3,y_3)$，则有$H(x_3)-H(x_2)=\Phi(b_1)-\Phi(b_2)+c(b_2)(b_2-b_1)>0$，由此可推得$x_3>x_2$(由条件4))，$y_3=b_2$，$\frac{\mathrm{d}\Gamma_2}{\mathrm{d}t}|_{(1)}<-2ma(x)[b(x)-2c(b_2)]<0$.

这样Γ_2与Γ_1具有同样的性质.

同理，过$P_n(x_n,y_n)$作$\Gamma_n:\Phi(y)-c(b_n)y+H(x)=\Phi(b_{n-1})-c(b_n)b_{n-1}+H(x_n)$，这里$b_n\overset{\Delta}{=}q(x_n),b_{n-1}\leqslant y\leqslant b_n$，$\Gamma_n$与$y=b_n$相交于$P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$，则$H(x_{n+1})-H(x_n)=\Phi(b_{n-1})-\Phi(b_n)+c(b_n)[b_n-b_{n-1}]>0$，$\frac{\mathrm{d}\Gamma_n}{\mathrm{d}t}|_{(1)}=-a(x)[h(x)(b(x)-c(b_n))+(c(b_n)-c(y))e(t)]<0,x_{n+1}>x_n,y_{n+1}=b_n$，即$\Gamma_n$与$\Gamma_1$具有同样性质.

如此继续下去，我们可得到$\{\Gamma_n\}$经过$P_n(x_n,y_n)$，且$x_n>x_{n-1}>\cdots>x_1=a,y_n=b_{n-1}\overset{\Delta}{=}q(x_{n-1})(n>1)$. 下证$\{x_n\}$为发散数列，显然，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[H(x_n)-H(x_{n-1})]$发散，则$\{x_n\}$发散，因此我们只需证明该级数是发散的.

事实上，由于$H(x_3)-H(x_2)=c(b_2)(b_2-b_1)-\int_{b_1}^{b_2}c(u)\mathrm{d}u$，由条件3)得

$$H(x_3)-H(x_2)\geqslant\omega[c(b_2)-c(b_1)]^{\alpha}[b_2-b_1]^{\beta}=\frac{\omega}{2^{\alpha}}[b(x_2)-b(x_1)]^{\alpha}[q(x_2)-q(x_1)]^{\beta}.$$

再由(5)式得

$$\frac{H(x_3)-H(x_2)}{H(x_2)-H(x_1)}\geqslant\frac{\omega}{2^\alpha}\left(\frac{b(x_2)-b(x_1)}{H(x_2)-H(x_1)}\right)^\alpha\left(\frac{q(x_2)-q(x_1)}{H(x_2)-H(x_1)}\right)^\beta(2b_1c(b_1))^{\alpha+\beta-1}$$

$$=\frac{\omega}{2^\alpha}\left(\frac{b'(\xi_1)}{H'(\xi_1)}\right)^\alpha\left(\frac{q'(\xi_2)}{H'(\xi_2)}\right)^\beta(2b_1c(b_1))^{\alpha+\beta-1},\xi_1,\xi_2\in[x_1,x_2],$$

再由条件 4)得$\dfrac{H(x_3)-H(x_2)}{H(x_2)-H(x_1)}\geqslant\dfrac{\omega}{2^\alpha}\gamma^{\alpha+\beta}(2b_1c(b_1))^{\alpha+\beta-1}>1.$

同理可证. $\dfrac{H(x_{n+1})-H(x_n)}{H(x_n)-H(x_{n-1})}\geqslant\{\dfrac{\omega}{2^\alpha}\gamma^{\alpha+\beta}(2b_1c(b_1))^{\alpha+\beta-1}\}^{2^{n-2}}>1,(n=2,3,\cdots\cdots).$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[H(x_n)-H(x_{n-1})]$ 发散,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,则一定存在某个 n 使得 Γ_n 与直线 $x=A$ 相交于某一点 $P'_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1}),x_{n+1}=A,y_n\leqslant y_{n+1}\leqslant 2b$.

过 $P'_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1}),P'_{n+2}(A,2b)$ 作 $\Gamma'_{n+1}:x=A$,则沿着 Γ'_{n+1} 有$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{a(x)}[c(y)-b(x)]<0$,即方程组(1) 的轨线与 Γ'_{n+1} 相交时从右向左穿人.

过 $P'_{n+2}(A,2b)$ 和 $P'_{n+3}(a,2b)$ 作 $\Gamma'_{n+2}:y=2b$,则沿着 Γ'_{n+2} 有$\dfrac{dy}{dt}=-a(x)[h(x)-e(t)]<0$,即方程组(1) 的轨线与 Γ'_{n+2} 相交时从上向下穿人.

过 $P'_{n+3}(a,2b)$ 和 $Q_0(-a,b)$ 作 $\Gamma'_{n+3}:y=\dfrac{b}{2a}x+\dfrac{3}{2}b$, 则

$$\frac{d\Gamma'_{n+3}}{dt}\Big|_{(1)}=-\frac{1}{2aa(x)}[2aa^2(x)(h(x)-e(t))+bc(y)-bb(x)]$$

$$<-\frac{1}{2aa(x)}[b(c(b)-m_2)-2am_3(m_1+m)]<0$$

(由(4)式得). 即方程组(1)的轨线与 Γ'_{n+3} 相交时也是从上向下穿人.

在左半平面上,完全对称地可作出具有同样性质的曲线:$\overline{\Gamma}_0,\overline{\Gamma}_1\cdots\overline{\Gamma}_{\bar{n}},\overline{\Gamma}'_{\bar{n}+1},\overline{\Gamma}'_{\bar{n}+2},\overline{\Gamma}'_{\bar{n}+3}$. 综上我们作出了闭曲线 $\Gamma:\Gamma=\bigcup\limits_{i=0}^{n}\Gamma_i\bigcup\limits_{j=n+1}^{n+3}\Gamma'_j\bigcup\limits_{i=0}^{\bar{n}}\overline{\Gamma}_i\bigcup\limits_{j=\bar{n}+1}^{\bar{n}+3}\overline{\Gamma}'_j$.

由上讨论得,方程组(1) 的一切轨线一旦与 Γ 相交必从其外部区域进人其内部区域,而且具有这种性质的闭曲线 Γ 可以任意扩大,从而可推得方程组(1) 的一切解正向有界.

推论 1.1 在定理 1 的条件下,若 $e(t+\theta)=e(t)(\theta>0$ 的常数),则系统(1) 至少存在一个以 θ 为周期的解.

该命题可直接由 Massera 定理[4] 推得.

推论 1.2 若 $c(y)=y^k(k=2l+1,l=0,1,2\cdots)$ 且满足定理 1 的条件 1),2),并存在常数 $a>0$,使得当 $|x|\geqslant a$ 时,有

$$\mathrm{sign}(x)h(x)\geqslant 2m,\mathrm{sign}(x)b(x)>\mathrm{sign}(x)b^{\frac{1}{k}}(x)>0,$$

$$\mathrm{sign}(x)\frac{(b^{\frac{1}{k}}(x))'}{H'(x)}\geqslant\gamma,\gamma>\sqrt{1+k}\left(\frac{|b(\pm a)|}{2}\right)^{-\frac{1+k}{2k}},$$

则微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{a(x)}[y^k-b(x)],\\ \dfrac{dy}{dt}=-a(x)[h(x)-e(t)]\end{cases}\tag{6}$$

的所有解正向有界.

为了证明该推论的成立，只需验证 $c(y)=y^k$ 满足(3)式即可，其余证明方法完全与定理1类似. 事实上，因为 $c(y)=y^k$，则当 $y_2>y_1>0$ 时，有

$$c(y_2)(y_2-y_1)-\int_{y_1}^{y_2}c(u)\mathrm{d}u=y_2^k(y_2-y_1)-\frac{1}{k+1}(y_2^{k+1}-y_1^{k+1})$$

$$=\frac{1}{k+1}(y_2-y_1)[y_2^k-y_1^k+y_2^{k-1}(y_2-y_1)+\cdots+y_2(y_2^{k-1}-y_1^{k-1})]$$

$$>\frac{1}{k+1}(y_2-y_1)(y_2^k-y_1^k)=\omega(y_2-y_1)^\alpha[c(y_2)-c(y_1)]^\beta,$$

这里 $\omega=\dfrac{1}{k+1}$，$\alpha=\beta=1$. 即(3)式满足，从而命题成立.

推论 1.3 若 $c(y)=y^k$，$(k=\dfrac{1}{2l+1},l=0,1,2\cdots)$ 并满足定理1的条件1)，2)，且存在常数 $a>0$，使得当 $|x|\geqslant a$ 时，有 $\mathrm{sign}(x)h(x)\geqslant 2m$，$\mathrm{sign}(x)b(x)>0$，

$$\mathrm{sign}(x)\frac{b'(x)}{H'(x)}\geqslant\gamma,\gamma>\sqrt{1+\frac{1}{k}}\left(\frac{2}{|b(\pm a)|}\right)^{\frac{k+1}{2k}},$$

则微分系统(6)的一切解正向有界.

与推论1.3相同，我们只需验证(3)式成立. 事实上，由于 $c(y)=y^k$，则当 $y_2>y_1>0$ 时有

$$c(y_2)(y_2-y_1)-\int_{y_1}^{y_2}c(u)\mathrm{d}u=y_2^{\frac{1}{2l+1}}(y_2-y_1)-\frac{2l+1}{2l+2}(y_2^{\frac{2l+2}{2l+1}}-y_1^{\frac{2l+2}{2l+1}})$$

$$=\frac{1}{2l+2}(y_2^{\frac{1}{2l+1}}-y_1^{\frac{1}{2l+1}})[(y_2-y_1)+y_1^{\frac{1}{2l+1}}(y_2^{\frac{1}{2l+1}}-y_1^{\frac{1}{2l+1}})+\cdots+y_1^{\frac{2l}{2l+1}}(y_2^{\frac{1}{2l+1}}-y_1^{\frac{1}{2l+1}})]$$

$$>\frac{1}{2l+2}(y_2^{\frac{1}{2l+1}}-y_1^{\frac{1}{2l+1}})(y_2-y_1)=\omega[c(y_2)-c(y_1)]^\alpha(y_2-y_1)^\beta,$$

这里 $\omega=\dfrac{1}{2l+2}=\dfrac{k}{k+1}$，$\alpha=\beta=1$. 从而推论1.3成立.

推论 1.4 在推论1.3的条件下，取 $k=1$，$\gamma>\dfrac{2\sqrt{2}}{|b(\pm a)|}$，则此时强迫振动方程(2)的一切解正向有界.

该推论推广了文献[1—3]的结论，因为这儿不需要限制条件：$a(x)$ 有界.

推论 1.5 若 $c(y)=\sum\limits_{i=1}^{l}c_iy^{k_i}$，$c_i>0$，$k_i=2l_i+1$ 或者 $k_i=\dfrac{1}{2l_i+1}$，$l_i=0,1,2,\cdots$，$i=1,2,\cdots,l$，并满足定理1的条件1)，2)，且存在常数 $a>0$，使得，当 $|x|\geqslant a$ 时，有

$\mathrm{sign}(x)h(x)\geqslant 2m$，$\mathrm{sign}(x)b(x)>0$，$\mathrm{sign}(x)\dfrac{b'(x)}{H'(x)}\geqslant\gamma$，

$\mathrm{sign}(x)\dfrac{q'(x)}{H'(x)}\geqslant\gamma$，$\gamma>\sqrt{1+k}\,|b(\pm a)q(\pm a)|^{-\frac{1}{2}}$，$k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l}\{k_i,\dfrac{1}{k_i}\}$，$q(x)$ 同前，

则微分系统 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{a(x)}[\sum\limits_{i=1}^{l}c_iy^{k_i}-b(x)]\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-a(x)[h(x)-e(t)]\end{cases}$ 的所有解正向有界.

证明 由于 $c(y)=\sum_{i=1}^{l}c_iy^{k_i}$，则当 $y_2>y_1>0$ 时，有

$$c(y_2)(y_2-y_1)-\int_{y_1}^{y_2}c(u)\mathrm{d}u=\sum_{i=1}^{l}c_iy_2^{k_i}(y_2-y_1)-\sum_{i=1}^{l}\frac{c_i}{k_i+1}(y_2^{k_i+1}-y_1^{k_i+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{l}c_i[y_2^{k_i}(y_2-y_1)-\frac{1}{k_i+1}(y_2^{k_i+1}-y_1^{k_i+1})]>\sum_{i=1}^{l}c_i\omega_i(y_2-y_1)(y_2^{k_i}-y_1^{k_i}),$$

$w_i=\dfrac{1}{k_i+1}$ 或 $\omega_i=\dfrac{k_i}{k_i+1}$，令 $\omega^*=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant l}\{\omega_i\}$，则 $\omega^*=\dfrac{1}{k+1}$，$k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l}\{k_i,\dfrac{1}{k_i}\}$，

$$c(y_2)(y_2-y_1)-\int_{y_1}^{y_2}c(u)\mathrm{d}u>w^*[c(y_2)-c(y_1)]^{\alpha}(y_2-y_1)^{\beta},$$

$\alpha=\beta=1$，与推论 1.2 同样可证该推论成立.

下面我们来讨论非线性动力系统.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c(y)-F(x),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x),\end{cases}\tag{7}$$

其中 $F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，$f(x),g(x),c(y)$ 为连续可微函数 $x,y\in\mathrm{R}$.

定理 2 若 1) $xg(x)>0,(x\neq 0)$；2) $f(0)<0,\lim\limits_{|x|\to\infty}|F(x)|=+\infty$；3) 函数 $c(y)$ 满足定理 1 的条件 3)；4) 存在常数 $a>0$，使得当 $|x|\geqslant a$ 时有 $\mathrm{sign}(x)\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant\gamma$，$\mathrm{sign}(x)\dfrac{q'(x)}{g(x)}\geqslant\gamma$，$\mathrm{sign}(x)F(x)>0$，$\gamma>(\dfrac{2^{\alpha}}{\omega})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}|F(\pm a)q(\pm a)|^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}$，$q(x)=c^{-1}(\dfrac{F(x)}{2})$，则微分系统(7)至少存在一个包含原点的极限环.

证明 为了证明极限环的存在性，我们在相平面 xoy 上构造一个 Poincare 环域，使得系统(7) 的一切轨线与其相交时，均进入其环域之中.

取闭曲线：$\Phi(y)+G(x)=\rho^2,0<\rho\ll\Delta$，(这里 $\Phi(y)=\int_0^y c(u)\mathrm{d}u,G(x)=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u$) 为环域的内境界线，由于 $x\dot{x}+c(y)\dot{y}=-g(x)F(x)\geqslant 0,0<|x|\ll\Delta$，则系统(7) 的轨线与其相交时，必由其内部区域进入其外部区域.

环域的外境界线的构造与定理 1 的闭曲线 Γ 的构造完全相似，从而定理 2 成立.

推论 2.1 若 $c(y)=\sum_{i=1}^{l}c_iy^{k_i},c_i>0,k_i=2l_i+1$ 或 $k_i=\dfrac{1}{2l_i+1},l_i=0,1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,l$，并满足定理 2 的条件 1)，2)，且存在常数 $a>0$ 使得，当 $|x|\geqslant a$ 时有

$$\mathrm{sign}(x)F(x)>0,\mathrm{sign}(x)\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant\gamma,\mathrm{sign}(x)\frac{q'(x)}{g(x)}\geqslant\gamma,$$

$$\gamma>\sqrt{2(1+k)}|F(\pm a)q(\pm a)|^{-\frac{1}{2}},k=\max_{1\leqslant i\leqslant l}\{k_i,\frac{1}{k_i}\},q(x)=c^{-1}(\frac{F(x)}{2}),$$

则微分系统 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{l}c_iy^{k_i}-F(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x)\end{cases}$ 在原点附近至少存在一个极限环.

该结论可由定理 2 及推论 1.5 得. 又由上不难推得

推论 2.2 若 1) $xg(x)>0,(x\neq 0)$;2) $f(0)<0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|F(x)|=+\infty$;3) 存在常数 $a>0$ 使得,当 $|x|\geqslant a$ 时有:$\mathrm{sign}(x)F(x)>0$, $\mathrm{sign}(x)\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant\gamma$, $\gamma>\dfrac{2\sqrt{2}}{|F(\pm a)|}$,则微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-F(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x)\end{cases}$$

在原点附近至少存在一个极限环.

不难看出该推论与 Д рагилев 定理[5] 类似.

参考文献:

[1] ANTOSIEWITZ H A. *On nonlinear differential equations of the second order with intergable forcing term J* [J]. London Math. Soc., 1955 4: 64—67.

[2] SANSONE G, CONTY R. *Nonlinear differential equations* [J]. Pergamon press, 1964, 391—447.

[3] QIAN Chuan-xi. *Boundedness and asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear system* [J]. Bull London Math. Soc., 1992, 24: 281—288.

[4] MASSERA J L. *On Liapunoff's conditions of stability* [J]. Ann. Math., 1949, **50**: 705—721.

[5] Д рагилёв А В. Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний. ПММ, 1952, **16**: 85—88.

Boundedness of Solutions and Existence of Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations

YAN Yue-xin, ZHOU Zheng-xin

(Dept. of Math., College of Science, Yangzhou University, Jiangsu 225002, China)

Abstract: In this paper, we used a new method to discuss the boundedness and existence of periodic solutions of nonlinear differential system

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{a(x)}[c(y)-b(x)]\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-a(x)[h(x)-e(t)]\end{cases}$$

and applied these conclusions to study the boundedness of solutions and the existence of periodic solutions of the forcing vibrating differential equations

$$\ddot{x}+(f(x)+g(x)\dot{x})\dot{x}+h(x)=e(t).$$

Key words: Nonlinear; boundedness; periodic solution.