第22卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 22 No. 3
2002年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2002

用条件(P_W)刻画的幺半群*

冯德成[1]，　赵　华[2]

(1. 西北师范大学数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070；2. 解放军理工大学通信工程学院，江苏 南京 210016)

摘　要：本文引入了条件(P_W)，讨论了条件(P_W)与条件(P)、条件(P_E)之间的关系，刻画了幺半群上S-系的平坦性.

关键词：条件(P_W)；左PP幺半群；左PSF幺半群；平坦；弱平坦.

分类号：AMS(2000) 20M10/CLC O152.7

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)03-0465-04

1　准备知识

本文总假定S是幺半群，所考虑的S-系均是右S-系. 除特别声明外，所采用的符号均和文献[1]相同.

称右S-系A满足条件(P)，是指对任意$u,v\in S$，任意$a,a'\in A$，在$au=a'v$时，必存在$a''\in A,s,t\in S$使得$a=a''s,a'=a''t,su=tv$.

对左PP和左PSF幺半群，有下面的事实：

S是左PP的当且仅当对于任意$x\in S$，存在$e^2=e\in S$使得$ex=x$，并且由$ux=vx$得$ue=ve$；S是左PSF的当且仅当对任何$u,v,x\in S$，若$ux=vx$，则存在$r\in S$使得$ur=vr$，$rx=x$.

左PP幺半群是左PSF的，反之不然(参见文献[2]). 在S-系中有下列关系：条件(P)$\Rightarrow$平坦$\Rightarrow$弱平坦$\Rightarrow$主弱平坦，且每一个箭头的逆都不成立(参见文献[2]).

我们通常用S/ρ来表示循环右S-系(这里ρ是S上的右同余).

2　条件(P_E)和条件(P_W)

文[1]引入了条件(P_E).

若S是幺半群，A是右S-系，A满足条件(P_E)，意指对任意$a,a'\in A$，任意$u,v\in S$，在$au=a'v$时，必存在$a''\in A,s,t\in S,e,f\in E(S)$使得

* 收稿日期：1999-09-27
作者简介：冯德成(1973-)，男，甘肃武威人，在读博士研究生.
E-mail：fengdc@21cn.com

$$ae = a''se, a'f = a''tf, eu = u, fv = v, su = tv.$$

把条件(P_E)弱化，就得到了条件(P_W).

定义 2.1 称右 S-系 A 满足条件(P_W)，是指对任意 $a, a' \in A$，任意 $u, v \in S$，在 $au = a'v$ 时，必存在 $a'' \in A, s, t, u_1, v_1 \in S$ 使得 $au_1 = a''s, a'v_1 = a''t, u_1u = u, v_1v = v, su = tv$.

显然有(P)⇒(P_E)⇒(P_W). 由文[1]例 1(P_E)$\not\Rightarrow$(P)，而下面的例子说明(P_W)$\not\Rightarrow$(P_E).

例 2.2 设 $S = \langle x_1, x_2, \cdots | x_{i+1}x_i = x_i = x_ix_{i+1}, i = 1, 2, \cdots \rangle \cup \{1\}$. 则 S 为一幺半群，且 $|E(S)| = 1$. 取 S 的真右理想 $J = \langle x_1, x_2, \cdots | x_{i+1}x_i = x_i = x_ix_{i+1}, i = 1, 2, , \cdots \rangle$，则对任意 $j \in J$，都有 $j \in J_j$，设 $A(J) = (\{x, y\} \times (S \backslash J)) \cup (\{z\} \times J)$. 对任意 $s \in S$，定义

$$(z, u)s = (z, us), \quad (w, u)s = \begin{cases} (w, us), & 若 us \notin J, \\ (z, us), & 若 us \in J, \end{cases} \quad \omega \in \{x, y\},$$

则 $A(J)$ 作成右 S-系. 易证 $A(J)$ 满足条件(P_W)，但 $A(J)$ 不满足(P_E). 事实上，当 $|E(S)| = 1$ 时，条件(P)等价于条件(P_E)，由文[3]命题 2.1 知，对任意幺半群 S，$A(J)$ 不满足条件(P).

3 条件(P_W)对 S-系的平坦性的刻画

引理 3.1 设 ρ 是幺半群 S 上的右同余. 如果 S/ρ 满足条件(P_W)，那么对 S 中的任何元素 u, v，当 $u\rho v$ 时，存在 $s, t, u_1, v_1 \in S$ 使得 $su_1\rho u_1^2, tv_1\rho v_1^2, u_1u = u, v_1v = v$ 且 $su = tv$.

目前，尚不知道这一命题的逆是否成立，但对于某些特殊幺半群有

命题 3.2 设 S 是左 PP 幺半群，ρ 为 S 上的右同余. 则 S/ρ 满足条件(P_W)当且仅当对任意 $u, v \in S$，当 $u\rho v$ 时，存在 $s, t, u_1, v_1 \in S$ 使得 $su_1\rho u_1^2, tv_1\rho v_1^2, u_1u = u, v_1v = v$ 且 $su = tv$.

证明 必要性由引理 3.1 可证. 下证充分性.

假设 $(a\rho)u = (b\rho)v, a, b, u, v \in S$，即有 $(au)\rho(bv)$，则存在 $s, t, u_1, v_1 \in S$ 使得 $su_1\rho u_1^2$, $tv_1\rho v_1^2, u_1(au) = au, v_1(bv) = bv$，且 $sau = tbv$. 由 S 是左 PP 幺半群，故存在 $g^2 = g \in S$ 使得 $gu = u$，且由 $u_1au = au$ 得 $u_1ag = ag$，所以 $ag = u_1ag = u_1^2ag$，这样，$(ag)\rho = 1\rho(su_1ag)$，同样地存在 $h^2 = h \in S$ 使得 $bh = v_1bh, (bh)\rho = 1\rho(tv_1bh)$. 记 $s' = su_1a, t' = tv_1b$，则有 $(a\rho)g = (1\rho)s'g, (b\rho)h = (1\rho)t'h, gu = u, hv = v$. 而且有 $s'u = t'v$. 因此 S/ρ 满足条件(P_W).

设 S 是幺半群，用 $\rho(x, y)$ 表示 S 上包含 (x, y) 的最小的右同余.

引理 3.3([3]，引理 2.8) 若 S 是幺半群，设 p, q 为非负整数且 $p < q, x, s, t \in S$. 则 $s\rho(x^p, x^q)t$ 当且仅当 $s = t$，或者 $s = x^pu, t = x^pv, x^mu = x^nv, u, v \in S, m, n$ 为非负整数，且 $m \equiv n(\bmod(q - p))$.

定理 3.4 若 S 是幺半群，设 p, q 为非负整数，且 $p < q$. 如果 $S/\rho(x^p, x^q)$ 满足条件(P_W)，那么 $x^p = x^q$ 或者 x^p 是正则的.

证明 假设 $x^p \neq x^q$，由于 $x^p\rho(x^p, x^q)x^q$，则由引理 3.1 知存在 $s, t, u_1, v_1 \in S$ 使得

$$u_1x^p = x^p, v_1x^q = x^q, sx^p = tx^q, su_1\rho u_1^2, tv_1\rho v_1^2.$$

再由引理 3.3 知，存在 $u, v, u', v' \in S$ 使得

$$su_1 = u_1^2 \text{ 或 } su_1 = x^pu, u_1^2 = x^pv, \ tv_1 = v_1^2 \text{ 或 } tv_1 = x^pu', v_1^2 = x^pv'.$$

若 $su_1 = u_1^2$，则 $tv_1 \neq v_1^2$，否则由 $x^p = sx^p, x^q = tx^q$ 得 $x^p = x^q$ 与假设矛盾，所以有 $tv_1 = x^pu'$，

$v_1^2 = x^p v'$. 于是 $x^p = x^p u' x^{q-p} x^p$，则 x^p 正则. 另一方面，若 $su_1 \neq u_1^2$，则 $su_1 = x^p u, u_1^2 = x^p v$，这样就有$x^p = x^p v x^p$，故 x^p 是正则的.

推论 3.5([1]，引理 2.6)　设S是幺半群，$x \in S$，p, q为非负整数，且 $p < q$. 如果$S/\rho(x^p, x^q)$ 满足条件(P_E)，那么 $x^p = x^q$，或者 x^p 是正则的.

对幺半群S，若所有循环右S-系满足条件(P_W)，那么S是正则的，从后面的定理 3.9 可知其逆不成立. 对一元S-系来说，下面的结论是显然的.

定理 3.6　S是右 reversible 幺半群(任意两理想的交非空)当且仅当一元右S-系$Z = \{z\}$满足条件(P_W).

引理 3.7　若S是幺半群，$u, v \in S$ 且 $u \neq v$. 假定$S/\rho(u,v)$ 满足条件(P_W)，则存在 $w \in Su \cap Sv$，使得$(w, u) \in \rho(u,v)$. 此外，如果I是S的任意左理想，$u, v \in I$，那么存在 $x \in I$ 使得 $ux \neq vx$.

证明　记 $\rho = \rho(u,v)$，由于 $u\rho v$，那么存在 $u_1, v_1, s, t \in S$，使得

$$su_1 \rho u_1^2, tv_1 \rho v_1^2, u_1 u = u, v_1 v = v, \text{且 } su = tv.$$

记 $w = su$，则 $w \in Su \cap Sv$，从而 $u\rho w$.

假设I是S的左理想，$u, v \in I$，且对任何 $x \in I$ 总有 $ux = vx$. 注意到如果 $a\rho b$，则存在 $s_1, s_2, \cdots, s_n, t_1, t_2, \cdots, t_n, w_1, w_2, \cdots, w_n \in S$ 使得 $a = s_1 w_1, t_1 w_1 = s_2 w_2, \cdots, t_n w_n = b$，并且 $\{s_i, t_i\} = \{u, v\}$. 如果 $w \in I$，那么 $aw = s_1 w_1 w = t_1 w_1 w = \cdots = bw$. 如果$S/\rho$满足条件($P_W$)，则由 $u\rho v$ 知存在 $s, t, u_1, v_1 \in S$，使得 $su_1 \rho u_1^2, tv_1 \rho v_1^2, u_1 u = u, v_1 v = v$ 且 $su = tv$. 所以有 $u = u_1 u = u_1^2 u = tv_1 v = v_1^2 v = v$. 与已知矛盾，故假设是错误的，命题得证.

从引理 3.7 的证明过程看出，如果单循环右S-系(形式为$S/\rho(u,v)$的S-系)满足条件(P_W)，那么S的任何右理想是右可约半群(即对任何 $x \in I$，当 $ux = vx$ 时有 $u = v$).

定理 3.8　若S是左 PP 幺半群，且任意 $e \in E(s) \backslash \{1\}$ 是右零元. 设ρ是S上的右同余，那么S/ρ满足条件(P) 当且仅当S/ρ满足条件(P_W).

证明　事实上当S是左 PP 幺半群时，条件(P_W)与条件(P_E)等价，故依据文[1]定理 2.11 可证.

虽然条件(P_W) 比条件(P) 弱，但(P_W) 却蕴含了弱平坦，在一定的条件下，其逆也成立.

定理 3.9　设S是幺半群. 若右S-系A满足条件(P_W)，那么A是弱平坦的.

证明　设在 $A \otimes S$ 中有 $a \otimes u = a' \otimes v$，则 $au = a'v$，由A满足条件(P_W)，则存在 $s, t, u_1, v_1 \in S, a'' \in A$ 使得 $u_1 u = u, v_1 v = v, au_1 = a''s, a'v_1 = a''t, su = tv$. 因而在 $A \otimes (Su \cap Sv)$ 中有 $a \otimes u = a \otimes u_1 u = au_1 \otimes u = \cdots = a' \otimes v$，故$A$是弱平坦的.

定理 3.10　若S是左 PSF 幺半群，则右S-系A是弱平坦的当且仅当A满足条件(P_W).

证明　充分性可由定理 3.9 证得. 下证必要性. 设 $au = a'v, a, a' \in A, u, v \in S$，由于$A$是弱平坦的，所以$A$是主弱平坦的，且存在 $z \in Su \cap Sv, a'' \in A$，使得 $au = a'v = a''z$. 设 $z = su = tv$，则 $au = a''z = a''su$，由文献[5]引理 3.5 知，存在 $u_1 \in S$，使得 $au_1 = a''su_1 = a''s', u_1 u = u$. 同理存在 $v_1 \in S$，使得 $a'v_1 = a''tv = a''t', v_1 v = v$. 则 $a'u = su_1 u = su = tv = tv_1 v = t'v$. 因此$A$满足条件($P_W$).

由 于右绝对弱平坦幺半群一定是正则的因而也是左 PP 的，因此所有右S-系满足条件(P_W). 反之如果所有的右S-系满足条件(P_W)，那么S一定是右绝对弱平坦的，即有

定理 3.11 S 是右绝对弱平坦幺半群当且仅当所有的右 S-系满足条件(P_W).

引理 3.12[3],命题2.18 $S/\rho(x,x^2)$ 是平坦的当且仅当 x 是 S 中的正则元.

命题 3.13 若 S 为左 PP 幺半群,则 $S/\rho(x,x^2)$ 是平坦的当且仅当 $S/\rho(x,x^2)$ 满足条件(P_W).

证明 由定理 3.4 和引理 3.12 易证.

定理 3.14 若 S 交换且为左 PSF 幺半群,则 $S/\rho(x,x^2)$ 是平坦的当且仅当 $S/\rho(x,x^2)$ 满足条件(P_W).

证明 根据定理 3.10,引理 3.12 和文献[2] 中定理 5.3.3 可证.

衷心感谢导师刘仲奎教授对本文的悉心指导.

参考文献:

[1] GOLCHIN A, RENSHAW J. *A flatness property of acts over monoids.* to appear.

[2] 刘仲奎. 半群的S-系理论[M]. 北京:科学出版社,1999.
LIU Zhong-kui. *S-System Theory of Semigroup* [M]. Beijing: Science Press, 1999.

[3] BULMAN F S. *Flat and strongly flat S-systems* [J]. Communications in Algebra, 1992, **20**(9): 2553—2567.

[4] BULMAN F S, MCDOWELL K. *Monoids over which all weakly flat acts are flat* [J]. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1990, **33**: 287—298.

[5] LIU Zhong-kui, YANG Yong-bao. *Monoids over which every flat right acts satisfies condition (P)* [J]. Communications in Algebra, 1994, **22**(8): 2861—2875.

[6] BULMAN F S, NORMAK P. *Monoids over which all flat cyclic rihgt acts are strong flat* [J]. Semigroup Forum, 1995, **50**: 223—241.

[7] HOWIE J M. *An Introduction to Semigroup Theory*[M]. Academic Press, 1976.

[8] KILP M. *Commutative monoids all of whose principal ideals are projective* [J]. Semigroup Forum, 1973, **6**: 334—339.

The Descriptions of Monoids by Condition (P_W)

FENG De-cheng[1], ZHAO Hua[2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. Science and Engineering University of the Chinese People's Liberation Army, Nanjing 210016, China)

Abstract: This thesis introduces condition (P_W), investigates the relationships among condition (P_W), condition (P) and condition (P_E), and makes some descriptions of the flatness of S-act on monoids with condition (P_W).

Key words: condition (P_W); left PP monoid; left PSF monoid; flat; weakly flat.