第22卷第3期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 3
2002年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2002

一类多元 Gauss-Weierstrass 算子线性组合的逼近*

赵德钧[1]， 宋儒瑛[2]

（1. 绍兴文理学院数学系，浙江 绍兴 312000；2. 太原师范学院数学系，山西 太原 030031）

摘 要：本文主要讨论一类多元 Gauss-Weierstrass 算子的线性组合的逼近性质，建立了一致逼近下的正、逆定理，并给出了逼近阶的特征刻画.

关键词：多元 Gauss-Weierstrass 算子；多元线性组合；一致逼近；特征刻画.

分类号：AMS(2000) 41A10,41A15/CLC O174.41

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)03-0481-06

1 引 言

众所周知，一元 Gauss-Weierstrass 算子定义为：

$$L_n(f;x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_R e^{-n(u-x)^2/2}f(u)\mathrm{d}u,\quad x\in R,f\in C(R)\cap L_{+\infty}(R).\tag{1.1}$$

关于该算子及其线性组合的研究是相当完善的，然而关于该算子多元情形的线性组合的研究却很少，本文旨在作这方面的尝试. 现以二元算子为例，高维的情形是类似的.

二元 Gauss-Weierstrass 算子定义为：

$$L_{n,m}(f;x,y)=\iint_{R^2}W(n,x,u)\cdot W(m,y,v)f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\tag{1.2}$$

这里 $W(n,x,u)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}e^{-n(u-x)^2/2}$. 其线性组合按如下"形式"定义为：

$$L_{n,m}(f,r;x,y)=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}C_{i,j}(n,m)L_{n_i,m_j}(f;x,y),\quad r>1,\tag{1.3}$$

其中 $n_i,m_j\in N$ 且 n_i,m_j 及 $C_{ij}(n,m)$ 满足如下条件（K,C,K_1,K_2 为绝对常数）：

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\begin{cases}n=n_0<n_1<\cdots<n_{r-1}\leqslant Kn,\\ m=m_0<m_1<\cdots<m_{r-1}\leqslant Km;\end{cases} &&\text{(b)}\ \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}|C_{ij}(n,m)|\leqslant C;\\
&\text{(c)}\ \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}C_{ij}(n,m)=1; &&\text{(d)}\ \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}C_{ij}(n,m)n_i^{-\rho}m_j^{\rho-\sigma}=0;\\
&\text{(e)}\ 0<K_1\leqslant\frac{n}{m}\leqslant K_2<+\infty, &&\rho=0,1,\cdots,\sigma;\sigma=1,2,\cdots,r-1.
\end{aligned}\tag{1.4}$$

* 收稿日期：1999-10-16

基金项目：浙江省自然科学基金资助项目(194002)

作者简介：赵德钧(1962-)，男，浙江省新昌县人，副教授.

本文将建立这类二元 Gauss-Weierstrass 算子线性组合逼近的正、逆定理，从而给出如下等价关系：

$$\| L_{n,m}(f,r;x,y) - f(x,y) \| = O(n^{-\alpha/2}) \Leftrightarrow \omega^{2r}(f,h) = O(h^{\alpha}), \tag{1.5}$$

这里 $f \in C(R^2) \cap L_{+\infty}(R^2)$，$0<\alpha<2r$，而

$$\| f \| = \sup_{(x,y)\in R^2} |f(x,y)|, \omega^r(f,t) = \sup_{0<h\leqslant t} \sup_{\max|v_i|=1} \| \underset{(v_1,v_2)}{\Delta_h^r} f \|,$$

$$\underset{(v_1,v_2)}{\Delta_h^r} f(x,y) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f(x + (\frac{r}{2} - k)hv_1, y + (\frac{r}{2} - k)hv_2).$$

由[1]知：

$$\omega^{2r}(f,t) \sim K_{2r}(f,t^{2r}), \tag{1.6}$$

这里 $K_{2r}(f,t^{2r}) = \inf_{g\in D}\{ \| f-g \| + t^{2r}S(f)\}$，$S(f) = \max_{0\leqslant k\leqslant 2r} \| \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^k \partial y^{2r-k}} \|$，$D$ 为如下的 Sobolev 空间：

$$D = \{f | f \in C(R^2) \cap L_{+\infty}(R^2), \frac{\partial^{2r-1} f(x,y)}{\partial x^k \partial y^{2r-1-k}} \in A.C_{loc}, 0 \leqslant k \leqslant 2r-1, \text{且 } S(f) < +\infty\}$$

2　若干引理

为证本文的主要结论，我们首先给出多元线性组合的存在性及若干引理.

引理 2.1　对于任给的满足条件(1.4)(a)和(1.4)(e)的两正数列 $\{n_i\}_{i=0}^{r-1}$ 与 $\{m_j\}_{j=0}^{r-1}$，存在唯一的 $\{C_{ij}(n,m)\}_{i,j=0}^{r-1}$ 满足：

$$\text{(b}'\text{)} \sum_{i,j=0}^{r-1} |C_{ij}(n,m)| \leqslant C; \qquad \text{(c}'\text{)} \sum_{i,j=0}^{r-1} C_{ij}(n,m) = 1;$$

$$\text{(d}'\text{)} \sum_{i,j=0}^{r-1} C_{ij}(n,m) n_i^{-\rho} m_j^{-\sigma} = 0, \quad \rho,\sigma = 0,1,\cdots,r-1, \rho+\sigma \geqslant 1. \tag{2.1}$$

证明　简记 $C_{ij} = C_{ij}(n,m)$，N,M,C,D 分别为如下的 r 阶矩阵

$$N = (n_{i-1}^{-(j-1)})_{r\times r}, M = (m_{i-1}^{-(j-1)})_{r\times r}, C = (C_{i-1,j-1})_{r\times r}, D = \begin{pmatrix} 1 & O_{1,r-1} \\ O_{r-1,1} & O_{r-1,r-1} \end{pmatrix}_{r\times r} \tag{2.2}$$

则满足(2.1)(c′)—(d′)的关于未知数 C_{ij} 的线性方程组可表示为如下的矩阵方程：

$$NCM^T = D, \tag{2.3}$$

即

$$(N \otimes M)\hat{C} = \hat{D}, \tag{2.4}$$

其中 $N\otimes M$ 为矩阵 N 和 M 的直积，而 $\hat{C}$ 和 $\hat{D}$ 是元素分别为矩阵 C,D 的元素 c_{ij} 和 d_{ij} 的 r^2 维列向量，其行标(i,j)按字典式排序(见文[2])，而

$$\det(N \otimes M) = (\det N)^r \det(M)^r = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant r-1} (n_i^{-1} - n_j^{-1})^r (m_i^{-1} - m_j^{-1})^r \neq 0, \tag{2.5}$$

故(2.4)存在唯一解. 利用 Cramer 法则，由矩阵直积的定义及 Vandermonde 行列式的性质得

$$C_{ij} = \frac{\det(N_{i+1} \otimes M_{j+1})}{\det(N \otimes M)}, i,j = 0,1,\cdots,r-1, \tag{2.6}$$

其中 N_{i+1} 和 M_{j+1} 为用 r 维单位列向量 $(1,0,\cdots,0)^T$ 置换矩阵 N 和 M 的第 $i+1$ 列和第 $j+1$

列所得矩阵，从而由(1.4)(a)得

$$|C_{ij}| = |\frac{\det N_{i+1}\det M_{j+1}}{\det N \det M}|^r = |\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{r-1}\frac{n_k^{-1}}{n_i^{-1}-n_k^{-1}}\cdot\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{r-1}\frac{m_k^{-1}}{m_j^{-1}-m_k^{-1}}|^r < C, \tag{2.7}$$

因此(2.1)(b′)成立，从而引理得证.

注意到(2.4)的系数阵 $N\otimes M$ 为满秩方阵，于是由引理 2.1 可得以下的

推论 2.2 设两正数列 $\{n_i\}_{i=0}^{r-1}$ 和 $\{m_i\}_{j=0}^{r-1}$ 满足条件(1.4)(a)和(1.4)(e)，则关于 C_{ij} 的线性方程组(1.4)(c)－(d)存在唯一解，且其解满足(1.4)(b).

注 2.3 类似于方程组(2.1)(c′)－(d′)与方程组(2.4)的等价性的讨论，即可得出多元线性组合的相应结论.

引理 2.4 设 $f\in C(R^2)\cap L_{+\infty}(R^2)$，则

$$\| L_{n,m}(f,r;x,y)\| \leqslant M_r \| f\|, \tag{2.8}$$

这里 M_r 为仅与 r 有关而与 f,n,m 无关的常数，M 为绝对常数(下同).

证明 由[3]引理 1 知有 $\| L_{n_i,m_j}(f;x,y)\| \leqslant M\| f\|$，从而由(1.4)(b)知(2.8)成立.

对 $f\in D$，记 $N(f) = \sum_{k=0}^{2r}\| \frac{\partial^r f}{\partial x^k\partial y^{2r-k}}\|$.

引理 2.5 设 $f\in C(R^2)\cap L_{+\infty}(R^2)$，则

$$\| N(L_{n,m}(f,r;x,y))\| \leqslant M_r\cdot n^r\| f\|. \tag{2.9}$$

证明 由[4]知有下列等式成立：

(i) $A_k(n,x)=n^kL_n((\cdot-x)^k;x)=K(k)n^{[k/2]}$

$$K(k) = \begin{cases} 0, & \text{当 } k=2r-1, \\ (2r-1)!!, & \text{当 } k=2r; \end{cases} \tag{2.10}$$

(ii) $\frac{\partial^k}{\partial x^k}W(n,x,u)=Q_k(n,x,u)W(n,x,u)$,

$$Q_k(n,x,u) = \sum_{\eta=0}^{[k/2]} d_{k,\eta}n^{k-\eta}(u-x)^{k-2\eta}, \tag{2.11}$$

其中 $d_{k,\eta}$ 是与 n,x,u 无关之常数. 由(2.10)得

$$0\leqslant A_k(n,x)\leqslant M_r\cdot n^{k/2}. \tag{2.12}$$

于是

$$\begin{aligned} |\frac{\partial^{2r}}{\partial x^k\partial y^{2r-k}}L_{n_i,m_j}(f;x,y)| &= |\iint_{R^2}\frac{\partial^k}{\partial x^k}W(n_i,x,u)\frac{\partial^{2r-k}}{\partial y^{2r-k}}W(m_j,y,v)f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v| \\ &\leqslant \| f\| \cdot\{\sum_{l=0}^{[k/2]}|d_{k,l}|n_i^lA_{k-2l}(n_i,x)\}\{\sum_{l=0}^{[r-k/2]}|d_{2r-k,l}|m_j^lA_{2r-k-2l}(m_j,y)\} \\ &\leqslant M_r\cdot n^r\| f\|, \end{aligned} \tag{2.13}$$

从而由(1.4)(b)知(2.9)成立.

引理 2.6 设 $f\in D$，则

$$\| N(L_{n,m}(f,r;x,y))\| \leqslant M_r\cdot N(f). \tag{2.14}$$

证明 由[5,(4.6)]知有

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u-x)^i\frac{\partial^k}{\partial x^k}W(n,x,u)\mathrm{d}u = 0 \quad (k>i). \tag{2.15}$$

利用 Taylor 公式

$$f(u,v)=\sum_{l=0}^{2r-1}\frac{1}{l!}\Big[(u-x)\frac{\partial}{\partial x}+(v-y)\frac{\partial}{\partial y}\Big]^l f(x,y)+R_{2r}(f,x,y,u,v),\tag{2.16}$$

$$R_{2r}(f,x,y,u,v)$$
$$=\frac{1}{(2r-1)!}\int_0^1\Big[(u-x)\frac{\partial}{\partial x}+(v-y)\frac{\partial}{\partial y}\Big]^{2r}f[x+t(u-x),y+t(v-y)](1-t)^{2r-1}\mathrm{d}t,$$

从而得

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial x^k\partial y^{2r-k}}L_{n_i,m_j}(f;x,y)$$
$$=\iint_{R^2}\frac{\partial^k}{\partial x^k}W(n_i,x,u)\frac{\partial^{2r-k}}{\partial y^{2r-k}}W(m_j,y,v)\Big\{\sum_{l=0}^{2r-1}\frac{1}{l!}\Big[(u-x)\frac{\partial}{\partial x}+(v-y)\frac{\partial}{\partial y}\Big]^l f(x,y)\Big\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+$$
$$\iint_{R^2}\frac{\partial^k}{\partial x^k}W(n_i,x,u)\frac{\partial^{2r-k}}{\partial y^{2r-k}}W(m_j,y,v)R_{2r}(f,x,y,u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=:I+J,\tag{2.17}$$

其中,由于 $\tau<k$ 与 $l-\tau<2r-k$ 必有一式成立,从而由(2.10)得

$$I=\sum_{l=0}^{2r-1}\frac{1}{l!}\sum_{\tau=0}^{l}\binom{l}{\tau}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x^\tau\partial y^{l-\tau}}\int_R\frac{\partial^k}{\partial x^k}W(n_i,x,u)(u-x)^\tau\mathrm{d}u\cdot\int_R\frac{\partial^{2r-k}}{\partial y^{2r-k}}W(m_j,y,v)$$
$$(v-y)^{l-\tau}\mathrm{d}v=0.\tag{2.18}$$

于是

$$\Big|\frac{\partial^{2r}}{\partial x^k\partial y^{2r-k}}L_{n_i,m_j}(f;x,y)\Big|=|J|$$
$$=\Big|\iint_{R^2}\frac{\partial^k}{\partial x^k}W(n_i,x,u)\frac{\partial^{2r-k}}{\partial y^{2r-k}}W(m_j,y,v)R_{2r}(f,x,y,u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\Big|$$
$$\leqslant\frac{1}{(2r-1)!}\int_0^1\sum_{l=0}^{2r}\binom{2r}{l}\Big\|\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^l\partial y^{2r-l}}\Big\|\cdot\Big|\int_R\frac{\partial^k}{\partial x^k}W(n_i,x,u)(u-x)^l\mathrm{d}u$$
$$\cdot\int_R\frac{\partial^{2r-k}}{\partial y^{2r-k}}W(m_j,y,v)(v-y)^{2r-l}\mathrm{d}v\Big|(1-t)^{2r-1}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant M_r\sum_{l=0}^{2r}\Big\|\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^l\partial y^{2r-l}}\Big\|,$$

从而由(1.4)(b)知(2.14)成立.

引理 2.7 设 $f\in D$,则有

$$\|L_{n,m}(f,r;x,y)-f(x,y)\|\leqslant M_r\cdot n^{-r}N(f).\tag{2.19}$$

证明 由(2.16)得

$$L_{n,m}(f,r;x,y)-f(x,y)=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}C_{i,j}(n,m)[L_{n_i,m_j}(f;x,y)-f(x,y)]$$
$$=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}C_{i,j}(n,m)\iint_{R^2}W(n_i,x,u)\cdot W(m_j,y,v)\Big\{\sum_{l=1}^{2r-1}\frac{1}{l!}\Big[(u-x)\frac{\partial}{\partial x}+$$
$$(v-y)\frac{\partial}{\partial y}\Big]^l f(x,y)+R_{2r}(f,x,y,u,v)\Big\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=:I+J\tag{2.20}$$

其中由(2.8)式及推论 2.3 得

$$I=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}C_{i,j}(n,m)\sum_{l=1}^{2r-1}\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\frac{\partial^l f(x,y)}{\partial x^k\partial y^{l-k}}\int_R W(n_i,x,u)(u-x)^k\mathrm{d}u$$
$$\cdot\int_R W(m_j,y,v)(v-y)^{l-k}\mathrm{d}v$$
$$=\sum_{l=1}^{2r-1}\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\frac{\partial^l f(x,y)}{\partial x^k\partial y^{l-k}}K(k)K(l-k)\times$$
$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}C_{ij}(n,m)n_i^{-k+[k/2]}m_j^{k-l+[(l-k)/2]}$$
$$=0 \tag{2.21}$$
$$|J|=|\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}C_{ij}(n,m)\iint_{R^2}W(n_i,x,u)|W(m_j,y,v)R_{2r}(f,x,y,u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v|$$
$$\leqslant\frac{1}{(2r-1)!}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i}|C_{ij}(n,m)|\sum_{l=0}^{2r}\binom{2r}{l}\left\|\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^l\partial y^{2r-l}}\right\|K(l)K(2r-l)$$
$$n_i^{-l/2}m_j^{-\frac{1}{2}(2r-l)}\cdot\int_0^1(1-t)^{2r-1}\mathrm{d}t\leqslant M_r\cdot n^{-r}N(f) \tag{2.22}$$
于是结合(2.20)—(2.22) $\|L_{n,m}(f,r;x,y)-f(x,y)\|\leqslant\|J\|\leqslant M_r\cdot n^{-r}N(f)$. 证毕.

3 主要结果

定理 3.1(逼近正定理) 设 $f\in C(R^2)\cap L_{+\infty}(R^2)$,则有
$$\|L_{n,m}(f,r;x,y)-f(x,y)\|\leqslant M_r\omega^{2r}(f,n^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.1}$$
证明 首先有 $N(f)\sim S(f)=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant 2r}\left\|\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^k\partial y^{2r-k}}\right\|$,取 $g\in D$,则由引理 2.4 和引理 2.7 可得
$$\|L_{n,m}(f,r;x,y)-f(x,y)\|$$
$$\leqslant\|L_{n,m}(f-g,r;x,y)-(f-g)\|+\|f-g\|+\|L_{n,m}(g,r;x,y)-g(x,y)\|$$
$$\leqslant M_r[\|f-g\|+n^{-r}S(g)].$$
上式两边对 g 取下确界,即得 $\|L_{n,m}(f,r;x,y)-f(x,y)\|\leqslant M_rK_{2r}(f,n^{-r})\sim M_r\omega^{2r}(f,n^{-1/2})$.

定理 3.2(逼近逆定理) 设 $f\in C(R^2)\cap L_{+\infty}(R^2)$,则有
$$K_{2r}(f,n^{-r})\leqslant\|L_{k_1,k_2}(f,r;x,y)-f(x,y)\|+M_r(k_1/n)^rK_{2r}(f,k_1^{-r}). \tag{3.2}$$
证明 首先由 K-泛函的定义有
$$K_{2r}(f,n^{-r})\leqslant\|f-L_{k_1,k_2}(f,r;x,y)\|+n^{-r}S(L_{k_1,k_2}(f,r;x,y)), \tag{3.3}$$
这里 $k_1\leqslant n,k_2\leqslant m$. 取 $g\in D$,则由引理 2.5 和引理 2.6 得
$$S(L_{k_1,k_2}(f-g,r;x,y))\sim N(L_{k_1,k_2}(f-g,r;x,y))\leqslant M_r\cdot k_1\|f-g\|$$
$$S(L_{k_1,k_2}(g,r;x,y))\sim N(L_{k_1,k_2}(g,r;x,y))\leqslant M_r\cdot N(g),$$
从而得
$$n^{-r}S(L_{k_1,k_2}(f,r;x,y))\leqslant M_r\cdot n^{-r}[k_1\|f-g\|+S(g)]$$

$$\leqslant M_r(k_1/n)^r(\|f-g\|+k_1S(g)).$$

两边对 g 取下确界，即得

$$n^{-r}S(L_{k_1,k_2}(f,r;x,y))\leqslant M_r(k_1/n)^rK_{2r}(f;k_1^r). \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.3)即知(3.2)成立.

由定理 3.1 和定理 3.2 及 Berens-Lorentz 引理[6,Lemma9.3.4]知下列定理成立.

定理 3.3(逼近等价定理) 设 $f\in C(R^2)\cap L_{+\infty}(R^2)$，$0<\alpha<2r$，则有

$$\|L_{n,m}(f,r;x,y)-f(x,y)\|=O(n^{-\alpha/2})\Leftrightarrow\omega^{2r}(f,h)=O(h^\alpha)$$

参考文献：

[1] JOHNEN H, SCHERER K. *On the equivalence of the K-functional and the Moduli of continuity and some applications*. In: Schempp W. Zeller K Eds. Constructive Theory of Functions of Several Variables: Lecture Notes in Mathematics: Vol. 571. Berlin: Springer-Verleg: 1977, 119—140.

[2] 李 乔. 矩阵论八讲 [M]. 上海:上海科学技术出版社. 1988
LI Qiao. *Eight Lectures on Matrix* [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1988. (in Chinese)

[3] 王建力. 多元 Gauss-Weieratrass 算子的 L_p-逼近 [J]. 浙江大学学报, 1995, **29**(1): 131—137.
WANG Jian-li. *L_p-approximation by multidimensional Gauss-Weierstrass operators* [J]. Zhejiang Univ. J., 1995, **29**(1): 131—137. (in Chinese)

[4] 宣培才. 关于 Gauss-Weierstrass 算子线性组合的逼近 [J]. 数学研究与评论, 1992, **12**(1): 137—142.
XUAN Pei-cai. *Uniform approximation by combinations of Gauss-Weierstrass operators* [J]. J. of Math. Res. & Expo., 1992, **12**(1): 137—142. (in Chinese)

[5] MAY C P. *Saturation and inverse theorems for combination of a class of exponential-type operators* [J]. Can. J. Math., 1976, **28**(6): 1224—1250.

[6] DITZIAN Z, TOTIK V. *Moduli of smoothness* [M]. Springer series in computational math. Vol. 9. Springer-Verleg. 1987.

Approximation by a Class of Combinations of Multidimensional Gauss-Weierstrass Operators

ZHAO De-jun[1], SONG Ru-ying[2]

(1. Dept. of Math., Shaoxing College of Arts and Sciences, Zhejiang 312000, China;
2. Dept. of Math., Taiyuan Teacher's College, Shanxi 030031, China)

Abstract: In this paper, a class of combinations of multidimensional Gauss-Weierstrass operators are considered, and the direct and converse theorems and the characterization of approximation rate are given.

Key words: multidimensional Gauss-Weierstrass operators; linear combination of mutidimensional operators; uniform approximation; characterization.