素环的对称双导*

王 宇
(吉林师范大学数学系，吉林 四平 136000)

摘 要：本文讨论了具有非零对称双导的素环的交换性，得到了完善的定理，从而改进了已有的结果.

关键词：素环；交换性；对称双导.
分类号：AMS(2000) 16U80,16W25/CLC O153.3
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)03-0503-02

设 R 是结合环，$Z(R)$ 是 R 的中心，$[x,y]=xy-yx, x,y\in R$. 给出一个映射 $D:R\times R\to R$，使 $D(x,y)=D(y,x)$ 且 D 对两个分量都是可加的，即 $D(x+y,z)=D(x,z)+D(y,z)$，此外还满足 $D(xy,z)=D(x,z)y+xD(y,z)$，则称 D 为 R 的一个对称双导. 令 $d(x)=D(x,x)$，d 为 D 的迹函数.

引理 $[xy,z]=[x,z]y+x[y,z]$，任意的 $x,y,z\in R$

文献[1]研究了具有非零对称双导的素环的交换性，得到如下两个结论：

定理 A R 是特征不为2,3的素环，D 为 R 的一个非零对称双导，若 D 的迹函数 d 满足条件 $[x^2,d(x)]\in Z(R)$，任意的 $x\in R$，则 R 可换.

定理 B 若 R 是特征不为2,3的素环，d 为 R 的非零对称双导 D 的迹函数，则当 $xd(x)\pm d(x)x\in Z(R)$ 时，则 R 可换.

本文通过简短的证明过程，得到如下完善的结论，从而改进了上述定理.

定理 R 是特征不为2的素环，D 为 R 的一个非零对称双导，则 R 可换.

证明 对任意 $x,y,u,v\in R$，利用 D 的定义可知

$$\begin{aligned}D(xu,yv)&=D(x,yv)u+xD(u,yv)=D(yv,x)u+xD(yv,u)\\&=(D(y,x)v+yD(v,x))u+x(D(y,u)v+yD(v,u))\\&=D(y,x)vu+yD(v,x)u+xD(y,u)v+xyD(v,u).\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}D(yv,xu)&=D(y,xu)v+yD(v,xu)=D(xu,y)v+yD(xu,v)\\&=(D(x,y)u+xD(u,y)v+y(D(x,v)u+xD(u,v))\\&=D(x,y)uv+xD(u,y)v+yD(x,v)u+yxD(u,v).\end{aligned}$$

---

* 收稿日期：1999-12-10
作者简介：王 宇(1961-)，男，博士，副教授.

由于 $D(xu,yv)=D(yv,xu)$，可得

$$D(x,y)vu+xyD(v,u)=D(x,y)uv+yxD(u,v),$$

整理得

$$D(x,y)[u,v]=[x,y]D(u,v). \tag{1}$$

交换(1)式的 x,y 可得

$$D(x,y)[u,v]=-[x,y]D(u,v). \tag{2}$$

(1),(2)式相加得

$$2D(x,y)[u,v]=0.$$

由于 R 为素环且 $\mathrm{char}R\neq 2$，从而

$$D(x,y)[u,v]=0 \tag{3}$$

对任意 $r\in R$，用 ru 代替(3)式的 u 得 $D(x,y)[ru,v]=0$，由引理可知：$D(x,y)([r,v]u+r[u,v])=0$，再利用(3)式得：$D(x,y)r[u,v]=0$，即 $D(x,y)R[u,v]=0$.

若 R 非交换，则存在 $[u,v]\neq 0, u,v\in R$. 根据素环的定义知，$D(x,y)=0$，对任意 $x,y\in R$，这样与 D 是非零对称双导矛盾，故 R 是交换素环. □

下面的例子说明定理中的 $\mathrm{char}\,R\neq 2$ 是不能去掉的：

例 设 $M_2(Z_2)$ 是二元域 Z_2 上的二阶方阵环，显然 $M_2(Z_2)$ 是非交换的特征为 2 的素环，但它却有非零的对称双导 $D(x,y)=[x,y]\quad x,y\in M_2(Z_2)$.

致谢 感谢导师牛凤文教授的指导与帮助！

参考文献：

[1] 邓 清. 素环的对称双导与交换性[J]. 数学研究与评论, 1996, 3: 427-430.
DENG Qing. *Symmetric bi-derivations and commutativity of prime rings* [J]. J. of Math. Res. & Expo., 1996, 3: 427-430. (in Chinese)

Symmetric Bi-derivation of Prime Rings

WANG Yu
(2. Dept. of Math., Jilin Normal College, Siping 136000, China)

Abstract: In this paper, we obtain the following result: Let R be a prime ring of characteristic$\neq 2$. If R has a nonzero symmetric bi-derivation, then R is commutative.

Key words: prime ring; commutativity; symmetric bi-derivation.