第22卷第4期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

Hilbert 空间的正交分解及其应用*

段 火 元
(中国科学院数学研究所，北京 100080)

摘 要：基于 Riesz-表示算子，给出了实 Hilbert 内积空间按某种连续双线性泛函的正交分解的刻划；应用于鞍点变分问题，获得了解的分离及其强制型子问题.

关键词：Hilbert 空间；Riesz-表示算子；鞍点变分问题.
分类号：AMS(2000) 26A51,41A20/CLC O174.41
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)04-0599-04

1 引 言

鞍点变分问题的解之间的耦合是有实际(如力学、物理等)背景的，分离鞍点变分问题的解，可以避开反映解之间的耦合性的 K-椭圆性和 inf-sup 两个约束. 尽管具有鞍点结构的变分问题在数学上已有把第一变量和第二变量分别刻划成有约束优化问题的结论，但它们的有限元逼近却基本上是不可行的：有约束问题很难构造核空间的合理逼近；无约束问题因涉及 Green-函数处理起来变得十分困难(参看[1,4]). (注：在弹性力学中，第一变量通常代表位移，而第二变量代表应力.)

本文利用 Hilbert 空间 $X\times M$ 上给定的双线性连续泛函数 $b(\cdot,\cdot):X\times M\to IR$，对 X 按核 $V=\{v\in X;b(v,\mu)=0,\forall\ \mu\in M\}$ 正交分解的正交子空间 $V^{\perp}$，基于[3]引入的广义 Riesz-表示算子，给予了刻划. 由这一刻划，作为应用，从数学上分离了连续鞍点变分问题的两个变量：第一和第二变量分别满足强制型单变量变分问题. 由于是连续、变分层次上分离，因此它们的逼近是独立的.

2 Hilbert 空间正交分解的刻划

设 X,M 是两个实 Hilbert 空间，内积和范数分别是 $(\cdot,\cdot)_X$，$\|\cdot\|_X$ 与 $(\cdot,\cdot)_M$，$\|\cdot\|_M$；相应对偶空间为 X^*,M^*，内积和范数分别是 $(\cdot,\cdot)_{X^*}$，$\|\cdot\|_{X^*}$ 与 $(\cdot,\cdot)_{M^*}$，$\|\cdot\|_{M^*}$；X,X^* 与 M,M^* 的对偶积分别是 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X\times X^*}$ 与 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{M\times M^*}$. 符号 $L(X;Y)$ 表示由 X 映射到 Y 上的有界线性算子空间.

---

* 收稿日期：2000-01-17
作者简介：段火元(1969-)，男，博士..

设$b(\cdot,\cdot):X\times M\to IR$是连续双线性泛函,其范数

$$\|b\|=\sup_{0\neq(v,\mu)\in X\times M}\frac{b(v,\mu)}{\|v\|_X\|\mu\|_M};$$

而且满足inf-sup-条件[1,4]

$$\inf_{\mu\in M}\sup_{0\neq v\in X}\frac{b(v,\mu)}{\|v\|_X\|\mu\|_M}\geqslant\beta, \tag{2.1}$$

其中$\beta>0$是与v,μ无关的常数.与$b(\cdot,\cdot)$联系的线性算子$B\in L(X;M^*)$及对偶算子$B^*\in L(M;X^*)$为

$$\langle Bv,\mu\rangle_{M^*\times M}=\langle v,B^*\mu\rangle_{X\times X^*}=b(v,\mu)\quad\forall\ \mu\in X,\forall\ \mu\in M. \tag{2.2}$$

易见$\|B\|_{L(X,M^*)}=\|B^*\|_{L(M,X^*)}=\|b\|$;由$B$生成的核空间为

$$V=\ker(B)=\{v\in X|b(v,\mu)=0,\forall\ \mu\in M\}. \tag{2.3}$$

熟知:B的连续性表明V是X的闭子空间,因而X有正交分解

$$X=V\oplus V^\perp,V^\perp=\{v\in X|(v,\mu)_X=0,\forall\ \mu\in V\}. \tag{2.4}$$

下文我们给出$V^\perp$的刻划.为此,首先给出引理.

引理2.1 若$l\in X^*$适合

$$\langle l,v\rangle_{X^*\times X}=0,\forall\ _v\in V, \tag{2.5}$$

那么存在$\mu\in M$使得

$$\langle l,v\rangle_{X^*\times X}=b(v,\mu),\forall\ _v\in X. \tag{2.6}$$

证明 既然$b(\cdot,\cdot)$满足inf-sup-条件(2.1),则算子B^*的值域$R(B^*)$是X^*的闭子空间.利用Banach-闭值域定理[6],得到

$$R(B^*)=V^0,\quad V^0=\{y\in X^*|\langle y,\varphi\rangle_{X^*\times X}=0,\forall\ \varphi\in V\}. \tag{2.7}$$

于是(2.6)得证.证毕.

记$a(\cdot,\cdot):X\times X\to IR$是连续、对称双线性泛函,其范数

$$\|a\|=\sup_{0\neq(u,v)\in X\times X}\frac{a(u,v)}{\|u\|_X\|v\|_X};$$

而且满足X-椭圆条件

$$a(v,v)\geqslant\alpha\|v\|_X^2,\ \forall\ v\in X, \tag{2.8}$$

其中$\alpha>0$是与v无关的常数.与$a(\cdot,\cdot)$联系的线性算子$A\in L(X;X^*)$为

$$\langle Au,v\rangle_{X^*\times X}=a(u,v),\forall\ u\in X\ ,\forall\ v\in X. \tag{2.9}$$

显见:$\|A\|_{L(X,X^*)}=\|a\|$.

定理2.1 令

$$W=\{w\in X|\ \text{对任给定}\ \mu\in M,a(w,v)=b(v,\mu),\forall\ v\in X\}, \tag{2.10}$$

则在能量内积$(u,v)_X:=a(u,v),\forall\ u,v\in X$下有

$$V^\perp=W. \tag{2.11}$$

证明 显见$W\subseteq V^\perp$.反之,任给$u\in V^\perp$,因为$Au\in X^*$满足$\langle Au,v\rangle_{X^*\times X}=a(u,v)=0$,由引理2.1知:存在$\mu\in M$使得

$$\langle Au,v\rangle_{X^*\times X}=a(u,v)=b(v,\mu),\forall\ v\in X. \tag{2.12}$$

由此立见$u\in W$.证毕.

3 应用

考虑鞍点变分问题：给定 $l\in X^*$，求 $(u,p)\in X\times M$ 使得

$$\begin{cases} a(u,v)+b(v,p)=<l,v>_{X^*\times X},\forall\ v\in X, \\ b(u,\mu)=0,\forall\ \mu\in M. \end{cases} \tag{3.1}$$

(注：为强调 W 中的元素 w 与 μ 有关，记作 $w(\mu)$.）由(2.1)和 W 中的元素 $w(\mu)$ 满足方程 $a(w(\mu),v)=b(v,\mu),\forall\ v\in X$ 可以知道

$$a(w(\mu),w(\mu))\geqslant\frac{\beta^2}{\|a\|}\ \|\mu\|_M^2,\forall\ \mu\in M. \tag{3.2}$$

令

$$S=u+w(p),u\in V,w(p)\in V^{\perp}, \tag{3.3}$$

式中 u,p 是问题(3.1)的解，(3.3)是唯一正交分解. 由(3.1)的第一式可见

$$a(S,v)=\langle l,v\rangle_{X^*\times X}. \tag{3.4}$$

由 Lax-Milgram 引理[5,6]知(3.4)唯一确定 $S\in X$.

由于 $u=S-w(p)$，得

$$B(S-w(p))=0, \tag{3.5}$$

即

$$\langle Bw(p),\mu\rangle_{M^*\times M}=\langle BS,\mu\rangle_{M^*\times M},\forall\ \mu\in M. \tag{3.6}$$

于是

$$a(w(p),w(\mu))=a(w(\mu),S)=\langle l,w(\mu)\rangle_{X^*\times X},\forall\ \mu\in M. \tag{3.7}$$

(3.7)唯一确定 $p\in M/\ker(B^*)$，这里 $\ker(B^*)=\{\mu\in M|b(v,\mu)=0,\forall\ v\in X\}$.

因此，问题(3.1)归结为求解(3.4)，(3.7)两个独立的强制型变分问题，而 $u=S-w(p)$. (3.4)的逼近是经典的(参看[2]；(3.7)的有限元法可参见[3]. 此外，(3.4)与(3.7)适合于并行计算.

注记 $V^{\perp}=W$ 中元素的刻划实质上是由广义 Riesz-表示算子[3]刻划的：

$$w(\cdot):\mu\in M\to X \qquad a(w(\mu),v)=b(v,\mu),\forall\ v\in X. \tag{3.8}$$

正是广义 Riesz-表示算子 $w:M\to X$ 体现了 inf-sup-条件的存在对经典混合元的影响；换句话而言，只要广义 Riesz-表示算子 $w(\cdot)$ 被充分离散，inf-sup-条件总是不必要的. 而本文把原鞍点变分问题(3.1)分解为两个单变量强制型变分问题(3.4)与(3.7)，使得 inf-sup-条件在(3.7)的有限元法中归结为对广义 Riesz-表示算子 $w(\cdot)$ 是否充分离散，这总是容易做得到的(参看[3]).

参考文献：

[1] BREZZI F, FORTIN M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods* [M]. Springer Verlag, New York, 1991.

[2] CIARLET P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems* [M]. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[3] DUAN Huo-yuan. *New Mixed Variational Principles (in Chinese), Thesis, Institute of Computational*

Mathemtics and Scientific/Engineering computing ,Chinese Academy of Sciences,Beijing, 1997.
[4] GIRAULT V, RAVIART P A. *Finote Element Methods for Navier-Stokes Equations* [M]. Theory and Algorithms, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[5] ODEN J T, REDDY J N. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements* [M]. New York, Wiley, 1974.
[6] YOSIDA K. *Functional Analysis(sixth edition)* [M]. Springer-Verlag, New-York, 1980.

Characterization of the Orthogonal Decomposition of the Hilbert Space and Application

DUAN Huo-yuan
(Inst. of Math. , Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract: This paper proposes a characterization of the orthogonal subspace of Hilbert space, where the orthogonal decomposition is derived from some continuous bilinear form. As an application, the solutions to saddle-point problems are decoupled, and as a result two coercive subproblems are obtained, which can be separately approximated.

Key words: Hilbert space; orthogonal decomposition; Riesz-representation; saddle-point problem.