第22卷第4期
2002年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 22 No. 4
Nov. 2002

次线性半正边值问题的正解*

马宇红[1]，马如云[2]

（1. 西北师范大学学报编辑部，甘肃 兰州 730070；2. 西北师范大学数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：本文讨论 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{aligned}&(p(t)u')' + \lambda f(t,u) = 0,\quad r < t < R\\ &au(r) - bp(r)u'(r) = 0\\ &cu(R) + dp(R)u'(R) = 0\end{aligned}$$

正解的存在性，这里允许非线性项取负值. 当 f 在 $u=+\infty$ 处一致次线性增长且无界时，必存在 $\lambda^*>0$，对 $\forall\ \lambda: \lambda>\lambda^*$，上述边值问题存在正解.

关键词：Sturm-Liouville 边值问题；次线性；锥；全连续算子；正解存在性.

分类号：AMS(2000) 34B15, 34B25/CLC O175.8

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2002)04-0621-05

1　引言及主要结果

本文考虑 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{aligned}&(p(t)u')' + \lambda f(t,u) = 0,\quad r < t < R\\ &au(r) - bp(r)u'(r) = 0\\ &cu(R) + dp(R)u'(R) = 0\end{aligned}\tag{1}$$

正解的存在性，这里允许非线性项取负值.

问题(1)出现在应用数学和物理学的诸多领域，因而引起了许多学者的兴趣[1~2]，有关其正解的存在性结果可见文献[3～6]. 受文献[7]的启发，我们得到了下列结果：

定理 1　设下列条件成立：

(1) $p \in C[r,R]$，$p(t) > 0$，$\forall\ t \in [r,R]$；

(2) a、b、c、$d \geqslant 0$ 且 $\rho = ad + ac\int_r^R \frac{1}{p} + bc > 0$；

(3) $f: [r,R] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 连续，并且存在常数 $M > 0$，使得对 $\forall\ t \in [r,R]$ 及 $u \geqslant 0$，$f(t,u) \geqslant -M$；

(4) 存在紧区间 $[\alpha,\beta] \subset (r,R)$，使得 $\lim\limits_{u\to+\infty} \inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]} f(t,u) = +\infty$；

---

* **收稿日期**：1999-12-14

基金项目：国家自然科学基金资助项目(19801028)

作者简介：马宇红(1971-)，男，硕士，编辑.

(5) $\lim\limits_{u\to+\infty}\sup\limits_{t\in[r,R]}\dfrac{f(t,u)}{u}=0$,

则存在 $\lambda^*>0$,对 $\forall\ \lambda:\lambda>\lambda^*$,边值问题(1) 存在正解.

由于条件的变化,我们对上述问题的处理程序及方法均与文献[6] 有所区别. 我们的主要工具仍然是如下锥上的不动点定理.

定理 A[7] 设 E 为 Banach 空间,K 为 E 中的锥. Ω_1,Ω_2 为 E 的有界开子集,且 $0\in\Omega_1\subset\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$,令 $A:K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\to K$ 为全连续算子. 如果下列条件之一成立:

(i) 对 $u\in K\cap\partial\Omega_1$, $\|Au\|\leqslant\|u\|$;对 $u\in K\cap\partial\Omega_2$, $\|Au\|\geqslant\|u\|$.

(ii) 对 $u\in K\cap\partial\Omega_1$, $\|Au\|\geqslant\|u\|$;对 $u\in K\cap\partial\Omega_2$, $\|Au\|\leqslant\|u\|$.

则 A 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中存在不动点.

2 预备结果

设 $K(t,s)$为边值问题

$$\begin{aligned}&(p(t)u')'=0,\quad r<t<R\\&au(r)-bp(r)u'(r)=0\\&cu(R)+dp(R)u'(R)=0\end{aligned}$$

的 Green 函数,则

$$K(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\left(b+a\displaystyle\int_r^s\dfrac{1}{p}\right)\left(d+c\displaystyle\int_t^R\dfrac{1}{p}\right), & s\leqslant t,\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\left(b+a\displaystyle\int_r^t\dfrac{1}{p}\right)\left(d+c\displaystyle\int_s^R\dfrac{1}{p}\right), & s\geqslant t,\end{cases}\tag{2}$$

这里 $\rho=ad+ac\displaystyle\int_r^R\frac{1}{p}+bc$. 显然,$K(t,s)$ 非负连续,且

$$K(t,s)>0,\qquad (t,s)\in(r,R)\times(r,R),\tag{3}$$

$$K(t,s)\leqslant K(s,s),\quad\forall\ t\in[r,R].\tag{4}$$

引理 1[6] 设 u 为边值问题

$$\begin{aligned}&(p(t)u')'=-v,\qquad r<t<R\\&au(r)-bp(r)u'(r)=0\\&cu(R)+dp(R)u'(R)=0\end{aligned}$$

的解,则

$$u(t)\geqslant\|u\|q(t),\quad t\in[r,R],\tag{5}$$

这里 $v\in L^1(r,R)$,$v\geqslant0$, $\|u\|=\sup\limits_{t\in[r,R]}|u(t)|$,

$$q(t)=\frac{\left(b+a\displaystyle\int_r^t\frac{1}{p}\right)\left(d+c\displaystyle\int_t^R\frac{1}{p}\right)}{\left(b+a\displaystyle\int_r^R\frac{1}{p}\right)\left(d+c\displaystyle\int_r^R\frac{1}{p}\right)}.\tag{6}$$

引理 2[6] 设 $\overline{\omega}(t)$为边值问题

$$\begin{aligned}&(p(t)u')'=-1,\quad r<t<R\\&au(r)-bp(r)u'(r)=0\end{aligned}$$

$$cu(R)+dp(R)u'(R)=0$$

的解，则存在常数 $C>0$，使得

$$\overline{\omega}(t)\leqslant Cq(t),\quad \forall\, t\in[r,R],\tag{7}$$

这里

$$C=\frac{1}{\rho}(R-r)\left(b+a\int_r^R\frac{1}{p}\right)\left(d+c\int_r^R\frac{1}{p}\right).$$

注 1 在文献[6]中，Anuradha 等人取

$$q(t)=\min\left\{\frac{b+a\int_r^t\frac{1}{p}}{b+a\int_r^R\frac{1}{p}},\quad \frac{d+c\int_t^R\frac{1}{p}}{d+c\int_r^R\frac{1}{p}}\right\}.$$

定义 $\omega(t)=\lambda M\overline{\omega}(t)$，则 u 为边值问题(1)的正解当且仅当 $\tilde{u}=u+\omega$ 为边值问题

$$\begin{aligned}&(p(t)u')'=-\lambda\tilde{g}(t,u-\omega),\ r<t<R\\&au(r)-bp(r)u'(r)=0\\&cu(R)+dp(R)u'(R)=0\end{aligned}\tag{8}$$

的解，且 $\tilde{u}(t)>\omega(t)$，$\forall\, t\in(r,R)$. 这里

$$\tilde{g}(t,x)=\begin{cases}g(t,x), & x\geqslant 0,\\ g(t,0), & x<0,\end{cases}$$

其中 $g(t,x)=f(t,x)+M$.

在 Banach 空间 $C[r,R]$中定义锥 $K=\{u\in C[r,R]:u(t)\geqslant\|u\|q(t),t\in[r,R]\}$. 对每一个 $v\in K$，令 $u=Av$ 为边值问题

$$\begin{aligned}&(p(t)u')'=-\lambda\tilde{g}(t,v-\omega),\quad r<t<R\\&au(r)-bp(r)u'(r)=0\\&cu(R)+dp(R)u'(R)=0\end{aligned}$$

的唯一解，则我们定义了一个算子 $A:K\to C[r,R]$:

$$Av(t)=\lambda\int_r^R K(t,s)\tilde{g}(s,v-\omega)\mathrm{d}s.\tag{9}$$

容易验证算子 $A:K\to K$ 全连续. 因此，我们只需证明 A 在 K 中存在一个不动点 $\tilde{u}(t)$，且 $\tilde{u}(t)>\omega(t)$，$\forall\, t\in(r,R)$即可.

3 定理 1 的证明

选取

$$d=\frac{2CM}{\int_\alpha^\beta K\left(\frac{\alpha+\beta}{2},s\right)\mathrm{d}s}.\tag{10}$$

由条件 4)，$\lim\limits_{u\to+\infty}\inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]}f(t,u)=+\infty$，所以对上述 $d>0$，存在正整数 N，当 $u>N$ 时，对$\forall\, t\in[\alpha,\beta]$，$f(t,u)\geqslant d$. 令 $\delta=\min\limits_{t\in[\alpha,\beta]}q(t)>0$. 固定

$$\lambda^*=\frac{N}{CM\delta}.\tag{11}$$

对于$\forall\ \lambda:\lambda>\lambda^*$，令 $H_1=2\lambda CM$，则对于 $u\in K$ 且 $\|u\|=H_1$，因为

$$u(s)-\omega(s)\geqslant \|u\|q(s)-\lambda CMq(s)=\lambda CMq(s)\geqslant\lambda CM\delta>\lambda^*CM\delta=N,\quad s\in[\alpha,\beta].$$

所以 $f(s,u-\omega)\geqslant d,\forall\ s\in[\alpha,\beta]$. 又由 $\tilde{g}$ 的构造可知，此时

$$\tilde{g}(s,u-\omega)=g(s,u-\omega)=f(s,u-\omega)+M\geqslant d+M>d. \tag{12}$$

对 $u\in K$ 且 $\|u\|=H_1$，结合(10)式有

$$Au\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\lambda\int_r^R K\left(\frac{\alpha+\beta}{2},s\right)\tilde{g}(s,u-\omega)\mathrm{d}s\geqslant\lambda\int_\alpha^\beta K\left(\frac{\alpha+\beta}{2},s\right)\tilde{g}(s,u-\omega)\mathrm{d}s$$
$$\geqslant\lambda d\int_\alpha^\beta K\left(\frac{\alpha+\beta}{2},s\right)\mathrm{d}s=2\lambda CM=H_1=\|u\|,$$

所以 $\|Au\|\geqslant\|u\|$. 令 $\Omega_1=\{u\in C[r,R]:\|u\|<H_1\}$，则

$$\|Au\|\geqslant\|u\|,\quad\forall\ u\in K\cap\partial\Omega_1. \tag{13}$$

现在，选取 $m>0$，使得

$$\lambda m\int_r^R K(s,s)\mathrm{d}s\leqslant 1. \tag{14}$$

定义 $\tilde{g}^*(x)=\max\limits_{s\in[r,R]}\tilde{g}(s,x)$. 由条件 5)，显然

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\tilde{g}^*(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\max_{s\in[r,R]}\frac{\tilde{g}(s,x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\max_{s\in[r,R]}\frac{f(s,x)+M}{x}=0,$$

所以对上述 $m>0$，$\exists\ H_2^*>0$，当 $r>H_2^*$ 时，

$$\tilde{g}^*(r)<mr. \tag{15}$$

由 $\tilde{g}$ 的构造及条件 4)，显然 $\tilde{g}^*(x)$为无界连续函数，所以我们可取到

$$H_2>\max(H_1,H_2^*), \tag{16}$$

使得对$\forall\ x:0\leqslant x\leqslant H_2$，

$$\tilde{g}^*(x)\leqslant\tilde{g}^*(H_2). \tag{17}$$

对于 $u\in K$ 且 $\|u\|=H_2$，因为 $0\leqslant u(s)-\omega(s)\leqslant u(s)\leqslant H_2$，所以

$$\tilde{g}^*(u-\omega)\leqslant\tilde{g}^*(H_2). \tag{18}$$

结合(14)，(15)，(16)式易知

$$Au(t)=\lambda\int_r^R K(t,s)\tilde{g}(s,u-\omega)\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_r^R K(s,s)\tilde{g}^*(u-\omega)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\lambda\int_r^R K(s,s)\tilde{g}^*(H_2)\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_r^R K(s,s)\mathrm{d}s\cdot mH_2$$
$$\leqslant H_2=\|u\|,$$

所以 $\|Au\|\leqslant\|u\|$. 取 $\Omega_2=\{u\in C[r,R]:\|u\|<H_2\}$，则

$$\|Au\|\leqslant\|u\|,\quad\forall\ u\in K\cap\partial\Omega_2. \tag{19}$$

由(13)，(19)式，结合定理 A 之 ii)可知，A 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$中存在不动点 $\tilde{u}(t)$. 显然 $\|\tilde{u}\|\geqslant 2\lambda CM$. 又因为 $\tilde{u}(t)\geqslant\|\tilde{u}\|q(t)\geqslant 2\lambda CMq(t)\geqslant 2\lambda M\varpi(t)=2\omega(t)\geqslant\omega(t)$，所以 $u=\tilde{u}-\omega$ 为问题(1) 的正解. □

注 2 定理 1 的证明方法与文献[6]是不同的. 正解要求 $u=\tilde{u}-\omega=\tilde{u}(t)-\lambda M\varpi(t)\geqslant(\|\tilde{u}\|-\lambda CM)q(t)>0,\forall\ t\in(r,R)$. 在超线性情形，可固定 $H_1=1$，这里 H_1 不依赖于 λ；但在次线性情形，必须取 $H_1=2\lambda CM$，这里 H_1 与 λ 有关.

注 3 当非线性项$f(t,u)$满足Carathéodory条件且在$u=+\infty$处次线性增长时，用本文的方法无法保证结论仍然成立. 因为只有对连续的无界函数f，才能取到$H_2>0$，使得对$\forall x$：$0\leqslant x\leqslant H_2$，$f(x)\leqslant f(H_2)$. 这一结论对定理1的证明是必不可少的.

参考文献：

[1] BANDLE C, COFFMAN C V, MARCUS M. *Nonlinear elliptic problems in annular domains* [J]. J. Differential Equations, 1987, **69**: 322—345.

[2] BANDLE C, KWONG M K. *Semilinear elliptic problems in annular domains* [J]. J. Appl. Math. Phys., 1989, **40**: 245—257.

[3] ERBE L H, WANG Hai-yan. *On the existence of positive solutions of ordinary differential equations* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, **120**(3): 743—748.

[4] 马如云. 二阶奇异边值问题的正解[J]. 数学学报, 1998, **41**(6): 1225—1230.
MA Ru-yun. *Positive solutions of sigulars second order boundary value problems* [J]. Acta Math. Sinica, 1998, **41**(6): 1225—1230. (in Chinese)

[5] GARAIZAR X. *Existence of positive radial solutions for semilinear elliptic equations in the annulus* [J]. J. Differential Equations, 1987, **70**: 69—72.

[6] ANURADHA V, HAI D D, SHIVAJI R. *Existence results for superlinear semipositone BVP'S* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1996, **124**(3): 757—763.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社, 1985.
GUO Da-jun. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1985. (in Chinese)

Existence Results of Positive Solutions for Sublinear Semipositone Boundary Value Problems

MA Yu-hong[1], MA Ru-yun[2]

(1. Editorial Department of the University Journal, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: We consider the existence of positive solutions for boundary value problems

$$(p(t)u')'+\lambda f(t,u)=0,\ r<t<R$$
$$au(r)-bp(r)u'(r)=0$$
$$cu(R)+dp(R)u'(R)=0,$$

where we allow that nonlinearity $f(t,u)$ be negative. If f is sublinear at $u=+\infty$ and unbounded, there exists a $\lambda^*>0$, the above boundary value problems has a positive solution for every $\lambda>\lambda^*$.

Key words: Sturm-Liouville boundary value problem; sublinear; completely continuous operator; cone; existence of positive solution.