第22卷第4期 数学研究与评论 Vol.22 No.4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

$\{e^{-i\lambda_n t}\}$ 的有理组合在 $C_{[a,b]}$ 的稠密性*

王建力[1]， 周颂平[2]

(1. 绍兴文理学院数学系，浙江 绍兴 312000；2. 宁波大学数学研究所，浙江 宁波 315211)

摘　要：本文首先考虑Müntz有理逼近的稠密性，从而得到广义三角多项式的有理组合在 $C_{[a,b]}$ 稠密的一类条件.

关键词：有理组合；Müntz逼近稠密；复序列.

分类号：AMS(2000) 41A20/CLC O174.41

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)04-0657-06

1　引言及其主要结果

$C_{[a,b]}$ 是 $[a,b]$ 上复连续函数全体所成赋范空间，其范数为上确界范数 $\|f\|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 对复序列 $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$，我们记

$$R(\Lambda)=\{\frac{P(x)}{Q(x)}|P,Q\in\operatorname{Span}\{x^{\lambda_n}\}\},Q(x)>0,x\in[a,b]\}.$$

从众所周知的Müntz定理知道，如果

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots, \tag{1.1}$$

则 $\{x^{\lambda_n}\}$ 的线性组合全体 $\operatorname{Span}\{x^{\lambda_n}\}$ 在 $C_{[0,1]}$ 稠密的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}=\infty$.

当限制 λ_n 离虚轴不“太近”时，许多结果已得到，例如，1971年W. A. Luxemburg和J. Korovaar[3]得到：

设 $\delta>0$，若 $|\mathrm{Re}\lambda_n|>\delta|\lambda_n|,n\in N$，则 $\operatorname{Span}\{x^{\lambda_n}\}$ 在 $C_{[a,b]}(a>0)$ 稠密的充分必要条件是

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^{-1}=\infty.$$

在有理组合的情形，1976年，G. Somorjai[5]证明了Newman的惊人猜想：在条件(1)下，$R(\Lambda)$ 总是在 $C_{[0,1]}$ 稠密. 1978年，J. Bak和D. J. Newman[1]又证明了如果 λ_n 是正数且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$，则 $R(\Lambda)$ 在 $C_{[0,1]}$ 稠密. 事实上Newman进一步猜想[4]对任一Markov系的有理组合总是稠密的.

当研究 $\{\lambda_n\}$ 是复数列时的有理逼近，在限制 λ_n 离虚轴不“太近”，我们有[6]如果

$$0\leqslant\mathrm{Re}\lambda_1<\mathrm{Re}\lambda_2\cdots<\mathrm{Re}\lambda_n\to+\infty,n\to\infty$$

* 收稿日期：1999-11-22

作者简介：王建力(1961-)，男，副教授.

存在常数 $M>0$ 满足

$$|\lambda_k| \leqslant M\mathrm{Re}\lambda_k, k \in N, \tag{1.2}$$

则 $R(\Lambda)$ 在 $C_{[0,\infty]}$ 稠密.

在有限区间 $[a,b]$ $(0<a<b<\infty)$，结合上面提及的 Luxemburg 和 Korevaar 的结果可得

定理 1 设 $\{\lambda_n\}$ 是两两不同的复数列，满足条件(1.2)，则 $R(\Lambda)$ 在 $C_{[a,b]}$ 稠密，这里 $0<a<b<\infty$.

本文我们考虑没有条件(1.2)限制的情形，事实上条件(1.2)排除了 λ_n 取纯虚数，而此时可引出非常有趣的广义三角多项式，从我们的结论可看出广义三角多项式的性质是完全不同于 Müntz 多项式的.

给定序列 $\{a_n\}$，记 $\Delta a_1 = a_1, \Delta a_k = a_k - a_{k-1}, k = 2,3,\cdots$ 我们有

定理 2 设 $0<a<b<\infty$，$\{\lambda_n\}$ 是两两不同的复数列，若

$$\lim_{n\to\infty}\Delta\lambda_n = 0, \tag{1.3}$$

则 $R(\Lambda)$ 在 $C_{[a,b]}$ 稠密.

若 D 是复数集，我们定义 D 满足性质(P)：任取 $\varepsilon>0$ 和 $m \in N$，存在复数 $\lambda = \lambda(\varepsilon,m)$，在 λ 的 ε 邻域 $N_\varepsilon(\lambda)$ 中至少含有 D 中 m 个数.

显然若 D 有聚点，则 D 必满足性质(P) 这样定理 2 可推广为

定理 3 设 $0<a<b<\infty$，$D = \{\lambda_n | n = 0,1,2,\cdots\}$ 满足性质(P)，则 $R(\Lambda)$ 在 $C_{[a,b]}$ 稠密.

作为应用我们考虑广义三角多项式，记

$$R(E^{\wedge}) = \{\frac{P(x)}{Q(x)} | P,Q \in \mathrm{Span}\{e^{-i\lambda_n t}\}, Q(x)>0, x \in [a,b]\}.$$

定理 4 设 $\{\lambda_n\}$ 为实序列，(a) 如果 $D = \{\lambda_n | n = 0,1,\cdots\}$ 满足性质(P)，则对任意的 $-\infty<a<b<\infty$，$R(E^{\wedge})$ 在 $C_{[a,b]}$ 稠密. (b) 如果 $\{\lambda_n\}$ 单调，存在 $\gamma>0$，有 $|\Delta\lambda_n|>\gamma, n\in N$，则存在 $-\infty<a<b<\infty$，使 $R(E^{\wedge})$ 在 $C_{[a,b]}$ 不稠密.

如果 $\{\lambda_n\}$ 严格单调满足条件(1.3)，则 D 必须满足性质(P)，故有

推论 设 $0 \leqslant l \leqslant \infty$，$\{\lambda_n\}$ 严格单调且满足 $\lim\Delta\lambda_n = l$ 则对任意的 $-\infty<a<b<\infty$，$R(E^{\wedge})$ 在 $C_{[a,b]}$ 稠密的充分必要条件是 $l=0$.

2 定理 2 的证明

根据 J. Bak 和 D. J. Newman[1] 的基本想法，我们记 $P_k(x)$ 是 $(\frac{x}{be})^\alpha$ 在 $\alpha = \lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{n+k}$ 的 k 阶差分，这里 $k \geqslant 0$，即

$$P_0(x) = P_0(x,\lambda_n) = (\frac{x}{be})^{\lambda_n},$$

$$\begin{aligned} P_k(x) &= P_k(x,\lambda_n,\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_{n+k}) \\ &= \frac{P_{k-1}(x,\lambda_n,\lambda_{n+k-1}) - P_{k-1}(x,\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_{n+k})}{\lambda_n - \lambda_{n+k}}, \quad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

引理 1 在定理 2 的条件下，对取定的 N，则有实序列 $\{\varepsilon_n\}$，$\varepsilon_n \to 0 (n\to\infty)$，使得对 $0 \leqslant k$

$\leqslant N$ 有

$$|P_k(x)-\frac{(x/(be))^{\lambda_n}\log^k((x/be))}{k!}|\leqslant(\frac{x}{(be)})^{\mathrm{Re}\lambda_n-1}2^{k+1}\varepsilon_n \tag{2.1}$$

存在一个与 n 无关的常数 C,当 n 充分大时有

$$|P_k(x)|\geqslant C(\frac{x}{be})^{\mathrm{Re}\lambda_n}|\log(\frac{x}{be})|^k, x\in[a,b]. \tag{2.2}$$

证明 不妨设 $|\lambda_j-\lambda_k|\leqslant\frac{1}{2}, n\leqslant j,k\leqslant n+N$,因为当 $x>0$ 时 $(x/be)^z$ 是整函数,由 Cauchy 公式和 $P_0(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{(x/be)^\zeta}{\zeta-\lambda_n}\mathrm{d}\zeta$,这里 $\gamma_n=\lambda_n+e^{i\theta}, 0\leqslant\theta<2\pi$, 归纳得

$$\begin{aligned}P_k(x)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}(\frac{1}{\prod_{j=n}^{n+k-1}(\zeta-\lambda_j)}-\frac{1}{\prod_{j=n+1}^{n+k}(\zeta-\lambda_j)})(x/be)^\zeta\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{(x/be)^\zeta}{\prod_{j=n}^{n+k}(\zeta-\lambda_j)}\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

另一方面 $\frac{(x/be)^{\lambda_n}\log^k(x/be)}{k!}=\frac{1}{k!}\frac{d_k}{\mathrm{d}z^k}(\frac{x}{be})^z|_{z=\lambda_n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{(x/be)^\zeta}{(\zeta-\lambda_n)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$,由直接计算知

$$\begin{aligned}&P_k(x)-\frac{(x/be)^{\lambda_n}\log^k(x/be)}{k!}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{(x/be)^\zeta}{(\zeta-\lambda_n)^{k+1}\prod_{j=n}^{n+k}(\zeta-\lambda_j)}((\zeta-\lambda_n)^{k+1}-\prod_{j=n}^{n+k}(\zeta-\lambda_j))\mathrm{d}\zeta,\end{aligned}$$

则

$$|P_k(x)-\frac{(x/be)^{\lambda_n}\log^k(x/be)}{k!}|\leqslant\frac{1}{2\pi}(\frac{x}{be})^{\mathrm{Re}\lambda_n-1}2^{k+1}\int_0^{2\pi}|e^{i(k+1)\theta}-\prod_{j=n}^{n+k}(e^{i\theta}+(\lambda_n-\lambda_j))|\mathrm{d}\theta.$$

由条件(1.3),及 N 是固定的,对 $n\leqslant j\leqslant n+N$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n-\lambda_j)=0$,故

$$\prod_{j=n}^{n+k}(e^{i\theta}+(\lambda_n-\lambda_j))=e^{i(k+1)\theta}+\varepsilon_n,$$

这里 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$,即 $|P_x(x)-\frac{(x/be)^{\lambda_n}\log^k(x/be)}{k!}|\leqslant(\frac{x}{be})^{R_e\lambda_n-1}2^{k+1}\varepsilon_n$. 不等式(2.2)由(2.1)推得.

引理 2 取定 N 和 $\varepsilon>0$ 及多项式 $q_N(t)=\sum_{J=0}^N a_jt^j$,则对充分大的 n 有

$$\|R(x)-q_N(\frac{-1}{\log(x/be)})\|_{[a,b]}<\varepsilon,$$

这里 $R(x)=\frac{\sum_{j=0}^N(-1)^ja_j(N-j)!P_{N-j}(x)}{N!P_N(x)}$.

证明 注意到 $(\frac{-1}{\log(x/be)})^j=\frac{(-1)^j\log^{N-j}(x/be)}{\log^N(x/be)}$,我们有

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^j(N-j)!P_{N-j}(x)}{N!P_N(x)}-(\frac{-1}{\log(x/be)})^j\\&=\frac{(-1)^j(N-j)!P_{N-j}(x)\log^N(x/be)-\log^{N-j}(x/be)N!P_N(x))}{N!P_N(x)\log^N(x/be)}.\end{aligned}$$

由引理 1,推得

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{(-1)^j(N-j)!P_{N-j}(x)}{N!P_N(x)}-\left(\frac{-1}{\log(x/be)}\right)^j\right| \\
&\leqslant\frac{(N-j)!\,|\log(x/be)|^N\left|P_{N-j}(x)-\dfrac{(x/be)^{\lambda_n}\log^{N-j}(x/be)}{(N-j)!}\right|}{N!\,|P_N(x)|\,|\log(x/be)|^N}+ \\
&\frac{N!\,|\log(x/be)|^{N-j}\left|\dfrac{(x/be)^{\lambda_n}\log^N(x/be)}{N!}-P_N(x)\right|}{N!\,|P_N(x)|\,|\log(x/be)|^N} \\
&\leqslant\frac{(x/be)^{\mathrm{Re}\lambda_n-1}((N-j)!2^{N-j+1}|\log(x/be)|^N+N!2^{N+1}|\log(x/be)|^{N-j})}{CN!(x/be)^{\mathrm{Re}\lambda_n}|\log(x/be)|^{2N}}\varepsilon n.
\end{aligned}
$$

因为 $x\in[a,b]$，$0<a<b<\infty$，则存在仅依赖于 a,b 的常数 M_0 有

$$\left|\frac{(-1)^j(N-j)!\ P_{N-j}(x)}{N!\ P_N(x)}-\left(\frac{-1}{\log(x/be)}\right)^j\right|\leqslant M_0\varepsilon_0.$$

因此 $\|R(x)-\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(\frac{-1}{\log(x/be)})^j\|_{[a,b]}\leqslant M_0\varepsilon_n\sum_{j=0}^{N}|\alpha_j|$，由此我们可找到 $N_0>0$，当 $n>N_0$，

$$\|R(x)-\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\left(\frac{-1}{\log(x/be)}\right)^j\|_{[a,b]}\leqslant\varepsilon.$$

定理 2 的证明 设 $f(x)\in C_{[a,b]}$，则 $g(t)=f(be^{1-\frac{1}{t}})\in C_{[a^*,1]}$ 这里 $a^*=\frac{-1}{\log(a/be)}$，由 Weierstrass 定理知，对任意的 $\varepsilon>0$，有 $N=N(\varepsilon)$ 次多项式 $q_N(t)=\sum_{j=0}^{N}\alpha_jt^j$ 使得

$$\|g(t)-q_N(t)\|^{[a^*,1]}<\varepsilon,$$

或

$$\|f(x)-q_N\left(\frac{-1}{\log(x/be)}\right)\|_{[a,b]}<\varepsilon. \tag{2.3}$$

对给定的 ε，N 是固定的，由引理 2 知对充分大的 n，有有理数函数 $R(x)\in R(\Lambda)$ 满足

$$\|q_N\left(\frac{-1}{\log(x/be)}\right)-R(x)\|_{[a,b]}<\varepsilon,$$

结合(6)式有 $\|f(x)-R(x)\|_{[a,b]}<2\varepsilon$.

3 定理 3 的证明

引理 3 $D=\{\lambda_n|n=0,1,2,\cdots\}$ 满足性质(P)等价于存在两两不同的数列 $\{\lambda'_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\lambda'_n\in D$ 及数列 $\{\lambda^{(l)}\}$，对任意的 $l\in N$ 有 $\lambda'_{2^l+j}\in N_{2^{-l}}(\lambda^{(l)})$，$j=0,1,\cdots,2^l-1$.

证明 对 $l=0$，任取 D 中一点记为 λ'_1

若对自然数 l，存在 $\lambda^{(l)}$ 及 D 中的 2^l 个点 $\lambda'_{2^l+j}\in N_{2^{-l}}(\lambda^{(l)})$，$j=0,1,\cdots,2^l-1$ 并且 $\lambda'_{2^l}+j\neq\lambda'_k$，$k=0,1,\cdots,2^l-1$，$j=0,1,\cdots,2^l-1$，则对自然数 $l+1$，由于 D 满足性质(P). 则存在复数 $\lambda^{(l+1)}$ 和 D 中 2^{l+1} 个点 $\lambda'_{2^{l+1}+j}\in N_{2^{-l-1}}(\lambda^{(l+1)})$，$j=0,1,\cdots,2^{l+1}-1$，显然可以做到 $\lambda'_{2^{l+1}+j}\neq\lambda'_k$，$j=0,1,\cdots,2^{l+1}-1$，$k=0,1,\cdots 2^{l+1}-1$，否则的话对 $\varepsilon=2^{-l-1}$，$m=2^{l+2}$ 不可能存在 $\lambda=\lambda(\varepsilon,m)$ 使得 $N_\varepsilon(\lambda)$ 至少含有 D 中的 m 个点，和 D 满足性质(P)矛盾.

定理 3 的证明 仅需证引理 3 中的 $\Lambda'=\{\lambda'_n\}$ 使 $R(\Lambda')$ 在 $C_{[a,b]}$ 稠密. 由引理 3 显然可

推得对任意的$\varepsilon>0$,有自然数列$\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$和$\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$,使得对$l=0,1,2,\cdots$有

$$|\Delta_{n_l+j}|\leqslant\varepsilon\quad j=0,1,\cdots,m_l. \tag{2.4}$$

利用n_l代替n可相似的证得引理1和引理2,从而证得定理3.

4 定理4的证明

首先我们叙述A.E.Ingham的一个结果[2]

定理5 设$f(t)=\sum_{n=N}^{N'}a_ne^{-i\lambda_nt}$,对$N\leqslant n\leqslant N'$,实单调序列$\{\lambda_n\}$满足$\Delta\lambda_n\geq\gamma>0$,如果$T=\frac{\pi+\varepsilon}{\gamma}>0$,则

$$\sum_{n=N}^{N'}|a_n|^2\leqslant\frac{u(\varepsilon)}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t,$$

这里$\varepsilon>0$,$u(\varepsilon)$是仅和ε有关的有限值.另一方面,如果$T'=\frac{r}{\gamma}>0$,则

$$\sum_{n=N}^{N'}|a_n|^2\geqslant\frac{\alpha(T')}{2T'}\int_{-T'}^{T'}|f(t)|^2\mathrm{d}t,$$

这里$\alpha(r)$仅和r有关的有限值.

定理4的证明 如果$D=\{\lambda_n|n=0,1,2,\cdots\}$满足性质(P),记$\overline{\Lambda}=\{i\lambda_n|n=1,2,\cdots\}$,显然$D'=\{i\lambda_n|n=1,2,\cdots\}$满足性质(P),由定理3,知$R(\overline{\Lambda})$在$C[e^{-b},e^{-a}]$稠密,即$R(E^{\wedge})$在$C_{[a,b]}$稠密,事实上只要作变换$x=e^{-t}$即可.

另一方面,由条件知存在$\sigma=\pm1$,对全体n有$\sigma\Delta\lambda_n>\gamma$令$\lambda^*=\gamma/2$,显然有

$$\sigma(\lambda_{k+1}-(\lambda_k+\lambda^*))\geqslant\lambda^*.$$

对任意的序列$\{a_j\}$,$\{b_j\}$,由定理5知

$$\int_{-2T}^{2T}|\sum_{j=0}^{n}(b_je^{-i(\lambda_j+\lambda^*)t}+a_je^{-i\lambda_jt})|^2\mathrm{d}t\geqslant A\sum_{j=0}^{n}(|a_j|^2+|b_j|^2), \tag{2.5}$$

$$\int_{-2T}^{2T}|\sum_{j=0}^{n}b_je^{-i\lambda_jt}|^2\leqslant B\sum_{j=0}^{n}|b_j|^2, \tag{2.6}$$

这里$\varepsilon>0$,$A=4T/u(\varepsilon)$,$B=4T/\alpha(\pi+\varepsilon)$.任取有理函数

$$r(t)=\frac{P(t)}{Q(t)}=\frac{\sum_{j=0}^{n}a_je^{-i\lambda_jt}}{\sum_{j=0}^{n}b_je^{-i\lambda_jt}},$$

记$\|e^{-i\lambda^*t}-r(t)\|_{[-2T,2T]}=e_n$,则从(2.5)(2.6)可推得

$$A\sum_{j=0}^{n}|b_j|^2\leqslant A\sum_{j=0}^{n}(|a_j|^2+|b_j|^2)\leqslant\int_{-2T}^{2T}|e^{-i\lambda^*t}Q(t)-P(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant e_n^2\int_{-2T}^{2T}|Q(t)|^2\leqslant Be_n^2\sum_{j=0}^{n}|b_j|^2,$$

故有$e_n^2\geqslant\frac{A}{B}\geqslant0$.定理4得证.

参考文献：

[1] BAK J, NEWMAN D J. *Rational combinations of* $\{x^{\lambda_k}\}, \lambda_k > 0$ *are always dense in* $C_{[0,1]}$[J]. J. Approx. theory, 1978, **23**: 155—157.

[2] INGHAN A E. *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series* [J]. Math. Zeitschrift, 1936, **41**: 367—379.

[3] LUXEMBURG G G, KOREVAAR J. *Entire functions and Müntz-Szász type approximation* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, **157**: 23—27.

[4] NEWMAN D J. *Approximation with Rational Functions* [M]. Amer. Math. Soc., Providence, RhodeIsland, 1978.

[5] SOMORJAI G. *Müntz type problem for rational apprroximation* [J]. Acta. Math. Acad. Sci. Hungar, 1976, **27**: 197—199.

[6] ZHOU S P. *On the density of rational combinations of* $\{x^{\lambda_n}\}$ *for some complex sequence* $\{\lambda_n\}$ [J]. Studia Sci. Math. Hungar, 1994, **29**: 369—377.

Dense of Rational Combinations of $\{e^{-i\lambda_n t}\}$ in $C_{[a,b]}$

WANG Jian-li[1], ZHOU Song-ping[2]

(1. Shaoxing College of Arts and Sciences, Zhejiang 312000, China;

2. Ningbo University, Zhejiang 315211, China)

Abstract: The present paper investigates approximation by rational combinations of $\{x^{\lambda_n}\}$ for a complex sequence $\{\lambda_n\}$,As an application,we have an interesting result in general trigonometric polynomials case,that is,for a real monotone sequence satisfying $\lim_{n\to\infty}\Delta\lambda_n = l$, the rational combination of $\{e^{-i\lambda_n t}\}$are dense in $C_{[a,b]}$ for any a,b $-\infty < a < b < \infty$,if and only if $l = 0$.

Key words: rational combinations; Müntz approxinmation; density; complex sequence.