具有色多项式 $\prod \sum \frac{u_i}{k}\binom{k}{u_i-k}(\lambda)_k$ 的图*

冶 成 福

(青海师范大学数学系，青海 西宁 810008)

摘 要：本文利用色多项式的性质，讨论了具有色多项式 $\prod_i \sum_k \frac{u_i}{k}\binom{k}{u_i-k}(\lambda)_k$ 的图的结构，给出了具有这种色多项式的全部色等价图.

关键词：色多项式；色等价图.

分类号：AMS(2000) 05C15/CLC O157.5

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)04-0669-04

1 引 言

本文所考虑的都是有限，无向的简单图，$P(G,\lambda)$ 和 $h(G,x)$ 分别表示 G 的色多项式和伴随多项式. $P(G,\lambda)=P(H,\lambda)$ 称 G 和 H 色等价，$h(G,x)=h(H,x)$ 称 G 和 H 伴随等价. 求给定图的色多项式在理论上已经解决，但若一个多项式是图的色多项式，求这个色多项式所确定的图难度较大，结果极少. 本文讨论了具有色多项式 $\prod_i \sum_k \frac{u_i}{k}\binom{k}{u_i-k}(\lambda)_k$ 的图的结构，给出了具有这种色多项式的全部色等价图.

用 $\nu(G)$，$\varepsilon(G)$ 分别表示图 G 的顶点数和边数. P_n 和 C_n 分别表示具有 n 个顶点的路和圈；D_n 表示 P_{n-2} 的一个1度点和 K_3 的一个顶点粘接得到的图；$T(l_1,l_2,l_3)(l_1\leqslant l_2\leqslant l_3)$ 表示只有一个3度点，三个1度点且唯一3度点到三个1度点的距离分别为 l_1,l_2,l_3 的树. $\overline{G}$ 表示 G 的补图；$h(G,x)=x^{a(G)}h_1(G,x)$，其中 $h_1(G,x)$ 的常数项非零. 为了方便，用 $h(G)$ 和 $h_1(G)$ 分别代替 $h(G,x)$ 和 $h_1(G,x)$；用 $h(l_1,l_2,l_3)$ 和 $h_1(l_1,l_2,l_3)$ 分别代替 $h(T(l_1,l_2,l_3),x)$ 和 $h_1(T(l_1,l_2,l_3),x)$. 用 $\beta(G)$ 表示 $h_1(G)$ 的最小根，未说明的术语和记号均参见[1,2,3].

2 预备知识

设 $P(\overline{G},\lambda)=\sum_{i=0}^{\nu-1}b_i(G)(\lambda)_{\nu-i}$，这里 $\nu=\nu(G)$，$(\lambda)_k=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$.

* 收稿日期：1999-11-22

基金项目：高等学校骨干教师计划资助项目；教育部自然科学重点研究项目；国家自然科学基金资助项目(10061003)

作者简介：冶成福(1964-)，男，青海湟中人，副教授.

定义 1[1]　设 G 是 ν 个顶点的图，则多项式 $h(G,x)=\sum_{i=0}^{\nu-1}b_i(G)x^{\nu-i}$ 称为图 G 的伴随多项式.

定义 2[1]

$$R(G)=\begin{cases} b_2(G)-\binom{\epsilon(G)-1}{2}+1, & \epsilon(G)>0; \\ 0 & \epsilon(G)=0 \end{cases}$$

称为图 G 的特征标.

引理 1[1]　设 G 有 k 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 则有

$$h(G,x)=\prod_{i=1}^{k}h(G_i,x),\quad R(G)=\sum_{i=1}^{k}R(G_i).$$

引理 2　(1)[4] $h(C_n\cup K_1)=h(1,1,n-2),n\geqslant 3,h(D_n\cup K_1)=h(1,2,n-3),n\geqslant 4$;

(2) $h(P_2)h(C_6)=h(P_3)h(D_5)$; $h(P_2)h(C_9)=h(P_5)h(D_6)$;

$h(P_2)h(C_{15})=h(P_5)h(C_5)h(D_7)$.

注　(2)可直接验证.

引理 3[1]　设 G 是连通图，则

(1) $R(G)\leqslant 1$，等号成立当且仅当 G 是 $P_n(n\geqslant 2)$ 或 K_3;

(2) $R(G)=0$，当且仅当 G 是 K_1,C_n,D_n 或者是 $T(l_1,l_2,l_3)$.

引理 4[5]　设 T 是一棵树，$f(T,\mu)$ 表示 T 的特征多项式，若令 $f(T,\mu)=\mu^{\theta(T)}f_1(T,\mu)$，$h(T,x)=x^{\alpha(T)}h_1(T,x)$，且 $x=-\mu^2$，则 $h_1(T,x)=(-1)^k f_1(T,\mu)$，其中 $\theta(T)$，$\alpha(T)$ 分别是 $f(T,\mu)$，$h(T,x)$ 的最低次项的次数，k 是 T 的最大匹配所含的边数.

引理 5[6]　若 λ 是树 T 的 m 重特征根，则 $-\lambda$ 也是 T 的 m 重特征根.

引理 6[7]　(1) T 形树 $T(1,1,n-1)$ 的特征根为 $0,2\cos\dfrac{2i-1}{2n+2}\pi(1\leqslant i\leqslant n+1)$;

(2) P_n 的特征根为 $2\cos\dfrac{i}{n+1}\pi(1\leqslant i\leqslant n)$.

由引理 2，引理 4，引理 5 得

命题 1　(1) $h_1(C_n)$ 的根集是 $\{-2(1+\cos\dfrac{2i-1}{n}\pi)\mid 1\leqslant i\leqslant[\dfrac{n}{2}]\}$;

(2) $h_1(P_n)$ 的根集是 $\{-2(1+\cos\dfrac{2i}{n+1}\pi)\mid 1\leqslant i\leqslant[\dfrac{n}{2}]\}$.

引理 7　(1)[8] 当 $n\geqslant 4$ 时，$\beta(D_n)\leqslant\beta(C_n)<\beta(P_n)$，等号成立当且仅当 $n=4$;

(2)[8] $\beta(D_{n+1})<\beta(D_n),(n\geqslant 4)$; $\beta(C_{n+1})<\beta(C_n),(n\geqslant 4)$，$\beta(P_{n+1})<\beta(P_n),(n\geqslant 2)$;

(3) $(h_1(C_m),h_1(P_{2n}))=1,(m>3,n\geqslant 1)$;

(4) $-3>\beta(C_n)>-4,(n\geqslant 4)$.

此引理中(3)(4)是命题 1 的直接结果.

引理 8[7]　设 T 是一棵树，$\lambda_1(T)$ 是 T 的最大特征根，则 $\lambda_1(T)<2$ 当且仅当

$$T\in\{P_n,T(1,1,n),T(1,2,2),T(1,2,4)\}.$$

命题 2　设 T 是一棵树，$\beta(T)>-4$ 当且仅当

$$T\in\{P_n,T(1,1,n),T(1,2,2),T(1,2,3),T(1,2,4)\}.$$

这是引理 4 和引理 8 的直接结果.

引理 9[9]　(1)设 G 是连通图，$R(G)=-k$，且 $\varepsilon(G)\geqslant\nu(G)+k-1$，则

$$\beta(G)\leqslant -4,$$

其中 $k=1,2,3$.

(2) G 是连通图，$k\geqslant 4$，且 $R(G)=-k$，则 $\varepsilon(G)<\nu(G)+k-1$.

引理 10[1]　$h(C_n)=\sum_{k\leqslant n}\frac{n}{k}\binom{k}{n-k}x^k\quad(n\geqslant 4)$.

命题 3　设 $A=\{u_i|u_i\geqslant 4$ 为整数$\}$，B 是由 4,5,6,7 组成的可重集，$C=\{\nu_i|\nu_i\geqslant 4$ 为整数$\}$ 若有

$$\prod_{u_i\in A}h_1(C_{u_i})=\prod_{v_i\in C}h_1(C_{v_i})\prod_{i\in B}h_1(D_i).\tag{1}$$

成立，则 $5,6,7\,\overline{\in}\,B$.

证明　若 $7\in B$，令 B 中 7 的个数为 t_1，由引理 2 知 $\beta(C_{15})=\beta(D_7)$，从而存在 $u_i\in A$ 使得 $u_i\geqslant 15$，当 $u_i>15$ 时，存在 $v_j\in C$ 使得 $\beta(C_{u_i})=\beta(C_{v_j})$ 从而 $u_i=v_j$，当 $v_j\in C$ 且 $v_j\geqslant 15$ 时存在 $u_i\in A$ 使得 $\beta(C_{v_j})=\beta(C_{u_i})$，从而 $u_i=v_j$，(1)两边消去满足 $u_i=v_j$ 的 $h_1(C_{u_i})$ 和 $h_1(C_{v_j})$，注意到 $h_1(D_4)=h_1(C_4)$，将 $h_1(D_4)$ 换成 $h_1(C_4)$ 有

$$\prod_{u_i\in A_1}h_1(C_{u_i})=\prod_{v_i\in C_1}h_1(C_{v_i})[h_1(C_4)]^{t_2}\prod_{i\in B_1}h_1(D_i),$$

这里 t_2 是 B 中 4 的个数，B_1 是 B 中取掉所有的 4 得到的子集. $A_1\subset A$，因为 $7\in B_1$，比较(1)两端的最小根知存在 $u_i=15\in A_1, C_1\subset C$ 且对所有的 $v_j\in C$ 有 $v_j<15$. 由引理 2 以及 $h_1(P_5)=(x+3)h_1(P_2)$ 有

$$(x+3)^{t_1}(h_1(C_5))^{t_1}\prod_{u_i\in A_2}h_1(C_{u_i})=\prod_{v_i\in C_2}h_1(C_{v_i})(h_1(C_4))^{t_2}\prod_{i\in B_2}h_1(D_i).\tag{2}$$

$A_2\subset A_1, C_2\subset C_1, B_2\subset B_1$ 且 $7\,\overline{\in}\,B_2$，若 $B_2=\varnothing$，由于 $\beta(C_n)<-3$，比较(2)两端的最小根得 $(x+3)^{t_1}=1$，只有 $t_1=0$，即 $7\,\overline{\in}\,B$，用类似的方法可证 $5,6\,\overline{\in}\,B$.

3　主要结果及证明.

定理　设 $A=\{u_i|u_i\geqslant 4$ 为整数$\}$，则 G 的色多项式为

$$\prod_{u_i\in A}\sum_{k\leqslant u_i}\frac{u_i}{k}\binom{k}{u_i-k}(\lambda)_k,$$

当且仅当

$$G\cong\overline{(\bigcup_{u_i\in A,u_i\neq 4}C_{u_i})\cup(\alpha C_4)\cup(\beta D_4)},$$

其中 $\alpha+\beta=|\{u_i|u_i\in A,u_i=4\}|$.

证明　因为 $h(C_4)=h(D_4)$，由引理 10 和伴随多项式的定义及引理 1 充分性是显然的.

必要性　由定义 1 和引理 10 只要证明 $\bigcup_{u_i\in A}C_{u_i}$ 的所有伴随等价图为 $(\bigcup_{u_i\in A,u_i\neq 4}C_{u_i})\cup(\alpha C_4)\cup(\beta D_4)$ 即可. 设 H 是 $\bigcup_{u_i\in A}C_{u_i}$ 的伴随等价图，由 $h_1(K_3)=h_1(P_4)$ 和 $(h_1(P_4),h_1(C_{u_i}))=1$ 知 H 没有 K_3 分支. 由引理 2 知 $h_1(D_l)=h_1(1,2,l-3)$. 当 $l\geqslant 8$ 时，由引理 7 及命题 2 知 $\beta(D_l)\leqslant -4<\beta(C_{u_i})$. 可见 $l\geqslant 8$ 时 $h_1(H)$ 不含 $h_1(D_l)$，并且当 $l_1=1$，$l_2=2, l_3\geqslant 5$ 或 $l_1\neq 1, l_2\neq 1,2$ 时，H 不含 $T(l_1,l_2,l_3)$，因此不妨设

$$H = rK_1 \cup (\bigcup_{i=1}^{l} P_{w_i}) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} C_{\nu_i}) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} T(l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, l_3^{(i)}) \cup (\bigcup_{i \in B} D_i)$$
$$\cup (\bigcup_{i=1}^{S_1} H_i) \cup (\bigcup_{i=S_1+1}^{S_2} H_i) \cup \cdots \cup (\bigcup_{i=S_{t-1}+1}^{S_t} H_i), \qquad (3)$$

其中 $R(H_i) = -j, H_i$ 连通，$S_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant S_j, S_0 = 1, j = 1,2,\cdots,t$.

B 是由 4,5,6,7 组成的可重集. $l_1^{(i)} = 1, l_2^{(i)} = 2, l_3^{(i)} \leqslant 4$ 或 $l_1^{(i)} = l_2^{(i)} = 1$. 由引理 1,引理 3 和(3)式有 $\sum_{i=1}^{S_t} R(H_i) = -l$, 从而 $\sum_{i=1}^{S_t} |R(H_i)| = l$. 并且

$$\varepsilon(H) = \sum_{i=1}^{l} \varepsilon(P_{w_i}) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon(C_{\nu_i}) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(T(l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, l_3^{(i)})) + \sum_{i \in B} \varepsilon(D_i) + \sum_{i=1}^{S_t} \varepsilon(H_i).$$

因为 $\beta(H_i) \geqslant \beta(H) = \beta(C_{u_i}) > -4$, 由引理 9 有

$$\varepsilon(H_i) \leqslant \nu(H_i) + |R(H_i)| - 2 \quad (1 \leqslant i \leqslant S_t).$$

从而有 $\varepsilon(H) \leqslant \nu(H) - 2S_t - r - n$. 另外 $\varepsilon(H) = \varepsilon(\bigcup_{u_i \in A} C_{u_i}) = \nu(\bigcup_{u_i \in A} C_{u_i}) = \nu(H)$, 所以 $2S_t + r + n \leqslant 0$. 只有 $s_t = 0, r = 0, n = 0$. 所以 $H = (\bigcup_{i=1}^{m} C_{u_i}) \cup (\bigcup_{i \in B} D_i)$. B 是 4,5,6,7 组成的可重集,也就有

$$\prod_{u_i \in A} h_1(C_{u_i}) = \prod_{i=1}^{m} h_1(C_{u_i}) \prod_{i \in B} h_1(D_i).$$

由命题 3 知 $5,6,7 \overline{\in} B$. 从而有

$$\prod_{u_i \in A} h_1(C_{u_i}) = \prod_{i=1}^{m} h_1(C_{u_i}) [h_1(D_4)]^{t_2},$$

t_2 是 B 中 4 的个数. 注意 $h(C_4) = h(D_4)$,比较上式两边的最小根知

$$H = (\bigcup_{u_i \in A, u_i \neq 4} C_{u_i}) \cup (\alpha C_4) \cup (\beta D_4),$$

其中 $\alpha + \beta = |\{u_i | u_i \in A, u_i = 4\}|$. 定理证毕.

推论 设 $G = \bigcup_{i=1}^{k} C_{n_i}$ $n_i > 5$, 则 $\overline{G}$ 是色唯一的.

注 推论是文献[2]的主要结果.

参考文献:

[1] LIU Ru-ying. *Adjoint polynomials and chromtically unique graphs* [J]. Discrete Math, 1997, **172**: 85—92.

[2] DU Qing-yan. *Chromaticity of complements of paths and cycles* [J]. Discrete Math, 1996, **162**: 109—125.

[3] BOND J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. 1976.

[4] 刘儒英. 一类树的补图的色唯一性[J]. 应用数学, 1996(增), 170—173.
LIU Ru-ying. *Chromatic uniqueness of complementory graphs of a class of trees*[J]. Math Applisate, 1996. Supplement: 170—173. (in Chinese)

[5] 刘儒英. 关于不可约的 T-形树[J]. 青海师专学报, 1997, **2**: 3—6.
LIU Ru-ying. *On the irreducible trees of T-shape* [J]. Journal of Qinghai Junior Teachers'College, 1997, **2**: 3—6. (in Chinese)

[6] Normal Biggs. *Algebraic Graph Theory* [M]. Cambridqe University Press, 1993: 52—53.

[7] CVETKOVIC D, DOOB M, SACHS H. *Spectra of Graphs* [M]. Academic Press New York, 1980: 72—79.

[8] 王守中,刘儒英. 圈和 D_n 图的补图的色唯一性 [J]. 数学研究与评论, 1998, **18**(2): 296.
WANG Shou-zhong, LIU Ru-ying. *Chromaticity of complements of cycles and* D_n[J]. J. of Math. Res & Expo., 1998, **18**(2): 296. (in Chinese)

[9] ZHAO Hai-xing, HUO Bo-feng, LIU Ru-ying. *Chromaticity of the complenents of path* [J]. Journal of Mathematical Study, 2000, **33**(4): 345—353.

The Graphs with the Chromatic Polynomial $\prod\sum\frac{u_i}{k}\binom{k}{u_i-k}(\lambda)_k$

YE Cheng-fu

(Dept. of Math., Qinghai Normal University, Xining 810008, China)

Abstract: In the paper, using the properties of chromatic polynomial, we investigate the structure of the graphs with the chromatic polynomial $\prod_i\sum_k\frac{u_i}{k}\binom{k}{u_i-k}(\lambda)_k$ and obtain all chromatically equivalent graphs with this chromatic polynomial.

Key words: chromatic polynomial; chromatically equivalent graphs.