第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

关于时滞差分方程的Razumikhin型稳定性定理*

周 宗 福
(安徽大学数学系，安徽 合肥 230039)

摘 要：本文对无限及有限时滞差分方程建立新的Razumikhin型稳定性定理，其中可避免采用不易寻找的辅助函数P.所得结论包含了文[1]的有关结果.

关键词：时滞差分方程；一致渐近稳定；Razumikhin型定理.
分类号：AMS(2000) 39A11/CLC number：O175.7
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0115-06

1 引 言

Razumikhin方法是分析时滞差分方程解的稳定性的一个重要工具.文[1]对无限时滞差分方程建立了一个基本的Razumikhin型稳定性定理，不过在此定理的Razumikhin条件中含有辅助函数P，而在实际应用时这个辅助函数P又是很难求的.那么能否建立可避免求辅助函数P的Razumikhin型稳定性定理呢？本文对这一问题进行了研究，我们首先对无限时滞差分方程 建立这种Razumikhin型稳定性定理，再利用类似的方法对有限时滞差分方程给出相应的结果，并给出一些方便实用的推论.

考虑无限时滞差分方程

$$x(t)=f(t,x(\tau);\tau=t,t-1,t-2,\cdots)\equiv f(t,x_t),\tag{1}$$

其中$f:I\times D\to R^n$，$I=\{a+n;n\in Z\}$(a为某一实数，Z为全体整数之集)，D为所有从$Z^-=\{0,-1,-2,\cdots\}$到R^n的映射组成的集合，

$$x_t=x_t(j)=x(t+j)(j=0,-1,-2,\cdots),x_t\in D.$$

$\forall x\in R^n$，$|x|$表示x的范数.$\forall\varphi\in D$，定义$\|\varphi\|=\sup\limits_{j\in Z^-}|\varphi(j)|$.

对于$t_0\in I,\varphi\in D$，用$x(t;t_0,\varphi)\triangleq x(t)$表示方程(1)满足初始条件$(t_0,\varphi)$的解，即$x(t)$在$t\geqslant t_0,t\in I$上满足方程(1)，且$x(t_0+j)=\varphi(j)(j\in Z^-)$即$x_{t_0}=\varphi$.假定$f(t,\varphi)$在$I\times D$上关于$\varphi$连续，且此连续性对$t$是一致的(即$\forall\varphi_0\in D,\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,\varphi_0)>0$，当$\|\varphi-\varphi_0\|<\delta(\varphi\in D)$时，$|f(t,\varphi)-f(t,\varphi_0)|<\varepsilon$对一切$t\in I$成立).另外，还假定$f(t,0)\equiv0$，从而方程(1)总有零解.

* **收稿日期**：2000-04-03
基金项目：国家自然科学基金(10241005)资助项目.
作者简介：周宗福(1964-)，男，副教授.

定义 1 若$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in I$,存在$\delta > 0$($\delta$与$t_0$无关),使得当$\|\varphi\| < \delta(\varphi \in D)$时,$|x(t; t_0,\varphi)| \leqslant \varepsilon(t \geqslant t_0, t \in I)$,则称方程(1)的零解一致稳定.

定义 2 若方程(1)的零解一致稳定,且存在$\delta_0 > 0, \forall \varepsilon > 0$,存在$T(\varepsilon) > 0, \forall t_0 \in I, \forall \varphi \in D, \|\varphi\| < \delta_0$,当$t \geqslant t_0 + T(\varepsilon), t \in I$时,$|x(t;t_0,\varphi)| \leqslant \varepsilon$,则称方程(1)的零解一致渐近稳定.

2 主要结果

设$u,v:R_+ \to R_+$ $(R_+ = [0, +\infty))$连续,单调不减,$u(0) = v(0) = 0$,当$s > 0$时,$u(s) > 0, v(s) > 0$;$w:R_+ \to R_+$连续,当$s > 0$时,$w(s) > 0$;$q:R_+ \to Z^+ = \{0,1,2,\cdots\}$,单调不增(并不要求$q$连续).以下讨论中出现的$u,v,w,q$均如这里所述.

定理 1 如果存在连续函数$V:I \times R^n \to R_+$,满足:

(i) $u(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant v(|x|)$;

(ii) 对某个$\beta_0 > 0, \forall \alpha, 0 < \alpha \leqslant \beta_0, \forall r > 0$,存在$\eta = \eta(\alpha,r) > 0$,当$t \in I, \alpha \leqslant V(t+1,x(t+1)) \leqslant \beta_0, V(t+j,x(t+j)) \leqslant V(t+1,x(t+1)) + \eta(j = 0, -1, -2, \cdots, -q(V(t+1,x(t+1))))$时,$\triangle V_{(1)}(t,x(t)) \leqslant -w(|x(t)|) + r$,

则方程(1)的零解一致渐近稳定.

注 1 V关于方程(1)的差分定义为:

$$\triangle V_{(1)}(t,x(t)) = V(t+1,x(t+1)) - V(t,x(t)).$$

证明 先证一致稳定.由于$V(t,x) \leqslant v(|x|)$,故存在$\beta_1 > 0$,当$|x| < \beta_1$时,$V(t,x) \leqslant \beta_0$.由对f的假设知,存在$\varepsilon_0 > 0$,当$\|\varphi\| < \varepsilon_0(\varphi \in D)$时,$|f(t,\varphi)| < \beta_1(t \in I)$.

$\forall \varepsilon > 0(\varepsilon < \varepsilon_0)$,使$u(\varepsilon) < \beta_0$.存在$\delta > 0$,使$v(\delta) < u(\varepsilon)$.$\forall t_0 \in I, \forall \varphi \in D, \|\varphi\| < \delta$,下证方程(1)的解$x(t) = x(t;t_0,\varphi)$满足

$$V(t,x(t)) \leqslant v(\delta)(t \geqslant t_0, t \in I). \tag{2}$$

因为当$t \leqslant t_0, t \in I$时,$x(t) = \varphi(t - t_0)$,故当$t \leqslant t_0, t \in I$时,

$$V(t,x(t)) \leqslant v(|x(t)|) \leqslant v(\|\varphi\|) \leqslant v(\delta).$$

若(2)不成立,则存在$t_1(t_1 \geqslant t_0, t_1 \in I)$,当$t \leqslant t_1, t \in I$时,$V(t,x(t)) \leqslant v(\delta), V(t_1+1, x(t_1+1)) > v(\delta)$.

由于当$t \leqslant t_1, t \in I$时$u(|x(t)|) \leqslant V(t,v(t)) \leqslant v(\delta) < u(\varepsilon)$,故$|x(t)| < \varepsilon$,故有$\|x_{t_1}\| \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$,从而$|x(t_1+1)| = |f(t_1,x_{t_1})| < \beta_1$,进而$V(t_1+1,x(t_1+1)) \leqslant \beta_0$.

令$\alpha = v(\delta), r = \dfrac{1}{2}(V(t_1+1,x(t_1+1)) - V(t_1,x(t_1)))$,则$0 < \alpha < u(\varepsilon) < \beta_0, r > 0$,且对任何$\eta > 0$,都有$\alpha \leqslant V(t_1+1,x(t_1+1)) \leqslant \beta_0, V(t_1+j,x(t_1+j)) \leqslant V(t_1+1,x(t_1+1)) \leqslant V(t_1+1,x(t_1+1)) + \eta(j = 0, -1, -2, \cdots, -q(V(t_1+1,x(t_1+1))))$,于是由条件(ii)有$\triangle V_{(1)}(t_1,x(t_1)) = V(t_1+1,x(t_1+1)) - V(t_1,x(t_1)) \leqslant -w(|x(t_1)|) + r \leqslant r$,$V(t_1+1,x(t_1+1)) \leqslant V(t_1,x(t_1)) \leqslant v(\delta)$,得出矛盾.

因此(2)成立,故当$t \geqslant t_0, t \in I$时,$u(|x(t)|) \leqslant V(t,x(t)) \leqslant v(\delta) < u(\varepsilon)$,$|x(t)| < \varepsilon$,所以方程(1)的零解一致稳定.

为证一致渐近稳定，取 $H>0$，使 $u(H)<\beta_0$，存在 $\delta_0>0$，使 $v(\delta_0)<u(H)$. $\forall\, t_0\in I$，$\forall\,\varphi\in D$，$\|\varphi\|<\delta_0$，下面来分析(1)的解 $x(t)=x(t;t_0,\varphi)$.

由一致稳定的证明可知，$x(t)$ 满足

$$V(t,x(t))\leqslant v(\delta_0)<u(H)<\beta_0(t\in I), \tag{3}$$

$$|x(t)|<H(t\geqslant t_0,t\in I). \tag{4}$$

$\forall\,\varepsilon>0$，使 $u(\varepsilon)<v(\delta_0)$. 记 $d_1(\varepsilon)=\inf\{|x|:V(t,x)\geqslant\frac{1}{2}u(\varepsilon)(\text{存在 }t\in I)\}$，则 $d_1(\varepsilon)>0$. 令 $d(\varepsilon)=\min\{d_1(\varepsilon),\frac{1}{2}H\}$，则 $0<d(\varepsilon)<H$，且由 $V(t,x)\geqslant\frac{1}{2}u(\varepsilon)(\text{存在 }t\in I)$ 可推出

$$|x|\geqslant d(\varepsilon). \tag{5}$$

令 $\alpha=u(\varepsilon)$，$r=\min\{\frac{1}{4}u(\varepsilon),\frac{1}{2}\inf\limits_{d(\varepsilon)\leqslant s\leqslant H}w(s)\}$，则 $0<\alpha<v(\delta_0)<u(H)<\beta_0$，$r>0$，由条件(ii)，对于 α,r 存在相应的 $\eta=\eta(\alpha,r)>0$ 满足所指明的性质.

由于 $u(\varepsilon)<v(\delta_0)$，故必存在正整数 K，满足

$$u(\varepsilon)+(K-1)\eta<v(\delta_0)\leqslant u(\varepsilon)+K\eta. \tag{6}$$

令 $\sigma=q(u(\varepsilon))$，$T_i=t_0+i(\sigma+[\frac{v(\delta_0)}{r}]+1)$，$i=0,1,2,\cdots,K$，其中$[\frac{v(\delta_0)}{r}]$表示不超过$\frac{v(\delta_0)}{r}$的最大整数. 下面利用归纳法证明：当 $t\geqslant T_i$，$t\in I$ 时，

$$V(t,x(t))\leqslant u(\varepsilon)+(K-i)\eta(i=0,1,2,\cdots,K). \tag{7}$$

首先当 $i=0$ 时(7)成立(由(3)及(6)即知). 假设对于某个 $i(0\leqslant i<K)$(7)成立，下证(7)对于 $i+1$ 也成立，即证：当 $t\geqslant T_{i+1}$，$t\in I$ 时，

$$V(t,x(t))\leqslant u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta. \tag{8}$$

先证存在 $\bar{t}$：$T_i+\sigma\leqslant\bar{t}\leqslant T_{i+1}$，$\bar{t}\in I$，使 $V(\bar{t},x(\bar{t}))\leqslant u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta$.

由反证法，若当 $T_i+\sigma\leqslant t\leqslant T_{i+1}$，$t\in I$ 时，总有

$$V(t,x(t))>u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta, \tag{9}$$

则此时 $V(t,x(t))>u(\varepsilon)>\frac{1}{2}u(\varepsilon)$，从而由(4)及(5)，$H>|x(t)|\geqslant d(\varepsilon)$，故有

$$w(|x(t)|)\geqslant 2r.$$

当 $T_i+\sigma\leqslant t\leqslant T_{i+1}-1$，$t\in I$ 时，$\alpha=u(\varepsilon)<V(t+1,x(t+1))\leqslant\beta_0$，$V(t+1,x(t+1))+\eta>u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta+\eta=u(\varepsilon)+(K-i)\eta\geqslant V(t+j,x(t+j))$ 对于 $j=0,-1,-2,\cdots,-q(V(t+1),x(t+1)))$(注意到已假定(7)对某个 i 成立及 $q(V(t+1,x(t+1)))\leqslant q(u(\varepsilon))=\sigma$)，于是由条件(ii)知

$$\triangle V_{(1)}(t,x(t))\leqslant-w(|x(t)|)+r\leqslant-2r+r=-r,$$

从而有 $\sum\limits_{\substack{t=T_i+\sigma\\ t\in I}}^{T_{i+1}-1}\triangle V_{(1)}(t,x(t))\leqslant-(T_{i+1}-1-(T_i+\sigma-1))r=-([\frac{v(\delta_0)}{r}]+1)r<-v(\delta_0)$，

即 $V(T_{i+1},x(T_{i+1}))-V(T_i+\sigma,x(T_i+\sigma))<-v(\delta_0)$，结合(3)知 $V(T_{i+1},x(T_{i+1}))<0$，得出矛盾. 所以存在 $\bar{t}$：$T_i+\sigma\leqslant\bar{t}\leqslant T_{i+1}$，$\bar{t}\in I$，使 $V(\bar{t},x(\bar{t}))\leqslant u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta$.

再进一步证明：当 $t\geqslant\bar{t}$，$t\in I$ 时，

$$V(t,x(t))\leqslant u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta. \tag{10}$$

如果上式不真，则存在 $t^*\geqslant\bar{t}$，$t^*\in I$，使得当 $\bar{t}\leqslant t\leqslant t^*$，$t\in I$ 时，

$$V(t,x(t)) \leqslant u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta,$$
$$V(t^*+1,x(t^*+1)) > u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta. \tag{11}$$

那么在 t^* 处利用条件(ii)作与上面类似的分析可知

$$\triangle V_{(1)}(t^*,x(t^*)) \leqslant -w(|x(t^*)|)+r. \tag{12}$$

下面分两种情况讨论：

（Ⅰ）若 $V(t^*+1,x(t^*+1))-V(t^*,x(t^*)) \geqslant 2r$，则由(12)有 $V(t^*+1,x(t^*+1))-V(t^*,x(t^*)) \leqslant -w(|x(t^*)|)+r \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}[V(t^*+1,x(t^*+1))-V(t^*,x(t^*))]$，$V(t^*+1,x(t^*+1)) \leqslant V(t^*,x(t^*)) \leqslant u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta$，这与(11)矛盾.

（Ⅱ）若 $V(t^*+1,x(t^*+1))-V(t^*,x(t^*)) < 2r$，则 $V(t^*,x(t^*)) > V(t^*+1,x(t^*+1))-2r > u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta-2r \geqslant u(\varepsilon)-2r \geqslant \frac{1}{2}u(\varepsilon)$，故由(5)及(4)，$H > |x(t)| \geqslant d(\varepsilon)$，从而 $w(|x(t^*)|) \geqslant 2r$. 于是由(12)有 $V(t^*+1,x(t^*+1)) \leqslant V(t^*,x(t^*))-w(|x(t^*)|)+r \leqslant V(t^*,x(t^*))-r < V(t^*,x(t^*)) \leqslant u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta$，与(11)矛盾.

可见(10)成立，从而可知 当 $t \geqslant T_{i+1}$，$t \in I$ 时 $V(t,x(t)) \leqslant u(\varepsilon)+(K-i-1)\eta$，即(7)对 $i+1$ 也成立，故由归纳法可知(7)对 $i=0,1,2,\cdots,K$ 都成立，特别地，在 $i=K$ 时即有：当 $t \geqslant T_K = t_0+K(\sigma+[\frac{v(\delta_0)}{r}]+1)$，$t \in I$ 时，$V(t,x(t)) \leqslant u(\varepsilon)$.

令 $T(\varepsilon)=K(\sigma+[\frac{v(\delta_0)}{r}]+1)$，当 $t \geqslant t_0+T(\varepsilon)$，$t \in I$ 时，$u(|x(t)|) \leqslant V(t,x(t)) \leqslant u(\varepsilon)$，从而 $|x(t)| \leqslant \varepsilon$，故方程(1)的零解一致渐近稳定.

推论1 如果存在连续函数 $V: I \times R^n \to R_+$ 及连续函数 $P: R_+ \to R_+$，当 $s>0$ 时 $P(s)>s$，它们满足：

(i) $u(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant v(|x|)$；

(ii) 当 $t \in I$，$V(t+j,x(t+j)) \leqslant P(V(t+1,x(t+1)))(j=0,-1,-2,\cdots,-q(V(t+1,x(t+1))))$ 时，$\triangle V_{(1)}(t,x(t)) \leqslant -w(|x(t)|)$，

则方程(1)的零解一致渐近稳定.

证明 只需证明定理1的条件(ii)满足即可.

对任意确定的正数 β_0，$\forall \alpha$，$0<\alpha \leqslant \beta_0$，$\forall r>0$，令 $\eta=\inf\limits_{\alpha \leqslant s \leqslant \beta_0}(P(s)-s)$，则 $\eta>0$. 当 $t \in I$，$\alpha \leqslant V(t+1,x(t+1)) \leqslant \beta_0$，$V(t+j,x(t+j)) \leqslant V(t+1,x(t+1))+\eta(j=0,-1,-2,\cdots,-q(V(t+1),x(t+1))))$ 时，$V(t+j,x(t+j)) \leqslant V(t+1,x(t+1))+\eta \leqslant P(V(t+1,x(t+1)))$，于是有 $\triangle V_{(1)}(t,x(t)) \leqslant -w(|x(t)|) \leqslant -w(|x(t)|)+r$，可见定理1的条件(*ii*)满足，故由定理1知，方程(1)的零解一致渐近稳定.

注2 推论1即为文[1]对无限时滞差分方程所给出的 Razumikhin 型稳定性定理.

下面来建立有限时滞差分方程的 Razumikhin 型定理.

考虑有限时滞差分方程

$$x(t+1)=F(t,x(\tau);\tau=t,t-1,t-2,\cdots,t-m) \equiv F(t,x_t), \tag{13}$$

其中 m 为一确定的自然数，$F: I \times C \to R^n$ 连续，C 为所有从 $\{-m,-m+1,\cdots,0\}$ 到 R^n 的映射组成的集合，$F(t,0) \equiv 0$.

定理 2　若存在连续函数 $V: I \times R^n \to R_+$，满足：

(i) $u(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant v(|x|)$；

(ii) 对于某个 $\beta_0 > 0, \forall\, \alpha, 0 < \alpha \leqslant \beta_0, \forall\, r > 0$，存在 $\eta = \eta(\alpha, r) > 0$，当 $t \in I, \alpha \leqslant V(t+1, x(t+1)) \leqslant \beta_0, V(t+j, x(t+j)) \leqslant V(t+1, x(t+1)) + \eta (j = -m, -m+1, \cdots, 0)$ 时，$\triangle V_{(13)}(t, x(t)) \leqslant -w(|x(t)|) + r$，

则方程(13) 的零解一致渐近稳定.

证明　将定理 1 的函数 q 取为 $q(s) \equiv m$，完全类似定理 1 即可证明.

推论 2　若存在连续函数 $V: I \times R^n \to R_+$ 及连续函数 $P: R_+ \to R_+$，当 $s > 0$ 时，$P(s) > s$，满足：

(i) $u(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant v(|x|)$；

(ii) 当 $t \in I, V(t+j, x(t+j)) \leqslant P(V(t+1, x(t+1)))(j = -m, -m+1, \cdots, 0)$ 时 $\triangle V_{(3)}(t, x(t)) \leqslant -w(|x(t)|)$，

则方程(13) 的零解一致渐近稳定.

证明　由定理 2 仿照推论 1 的证法即可证明.

推论 3　若存在连续函数 $V: I \times R^n \to R_+$，满足：

(i) $u(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant v(|x|)$；

(ii) $\triangle V_{(13)}(t, x(t)) \leqslant -G_1(V(t, x(t))) + G_2(\sup\limits_{-m \leqslant j \leqslant 0} V(t+j, x(t+j)))$，其中 $G_1, G_2: R_+ \to R_+$ 连续，G_2 单调不减，当 $s > 0$ 时，$G_1(s) > LS, G_2(s) \leqslant LS$，$L$ 为常数，$0 \leqslant L < 1$(式中的 $-m \leqslant j \leqslant 0$ 是指 $j = -m, -m+1, \cdots, 0$)，

则方程(13) 的零解一致渐近稳定.

证明　只要证明定理 2 的条件(ii) 满足即可.

$\forall\, \alpha, \beta, 0 < \alpha \leqslant \beta, \forall\, r > 0$，由于 $G_2(s)$ 在 $[\alpha, 2\beta]$ 上一致连续，故对于 $(1-L)r$，存在 $\eta > 0 (\eta < \beta)$，当 $|s_1 - s_2| \leqslant \eta (s_1, s_2 \in [\alpha, 2\beta])$ 时，$|G_2(s_1) - G_2(s_2)| < (1-L)r$. 当 $t \in I, \alpha \leqslant V(t+1, x(t+1)) \leqslant \beta, V(t+j, x(t+j)) \leqslant V(t+1, x(t+1)) + \eta (j = -m, -m+1, \cdots, 0)$ 时，

$$
\begin{aligned}
\triangle V_{(13)}(t, x(t)) &\leqslant -G_1(V(t, x(t))) + G_2(\sup_{-m \leqslant j \leqslant 0} V(t+j, x(t+j))). \\
&\leqslant -G_1(V(t, x(t))) + G_2[V(t+1, x(t+1)) + \eta] \\
&\leqslant -G_1(V(t, x(t))) + G_2[V(t+1, x(t+1))] + (1-L)r \\
&\leqslant -G_1(V(t, x(t))) + LV(t+1, x(t+1)) + (1-L)r,
\end{aligned}
$$

故有 $\triangle V_{(13)}(t, x(t)) \leqslant -\frac{1}{1-L}[G_1(V(t, x(t))) - LV(t, x(t))] + r \leqslant -\frac{1}{1-L} w_1(|x(t)|) + r$，其中 $w_1(s) = \inf\limits_{u(s) \leqslant \theta \leqslant v(s)} [G_1(\theta) - L\theta](s \geqslant 0)$，$w_1: R_+ \to R_+$ 连续，当 $s > 0, w_1(s) > 0$.

可见定理 2 的条件(ii) 满足，故由定理 2 知方程(13) 的零解一致渐近稳定.

推论 3 的条件比较自然，容易验证，所以推论 3 是一个方便实用的结论.

例　考虑有限时滞差分方程

$$
x(k+1) = A(k)x(k) + \sum_{j=0}^{m} f_j(k, x(k-j)), k \in Z^+ \tag{14}
$$

其中 $A(k)$ 为 $n \times n$ 矩阵，$x \in R^n, f_j: Z^+ \times R^n \to R^n$.

$|x|$ 与 $|A|$ 分别表示向量范数与矩阵范数，满足 $|Ax| \leqslant |A| \cdot |x|$. 如果 $\forall\ (k,x) \in Z^+ \times R^n$, $|f_j(k,x)| \leqslant h_j(k) \cdot |x| (j = 0,1,2,\cdots,m)$, 且 $\sup\limits_{k\in Z^+} \sum\limits_{j=0}^{m} h_j(k) = M_0 < M_1 = \inf\limits_{k\in Z^+} (1 - |A(k)|)$, 则方程(14) 的零解一致渐近稳定.

令 $V(k,x) = |x| (k \in Z^+, x \in R^n)$, 则 $\triangle V_{(14)}(k,x(k)) = |x(k+1)| - |x(k)| = |A(k)x(k) + \sum\limits_{j=0}^{m} f_j(k,x(k-j))| - |x(k)| \leqslant -(1 - |A(k)|) \cdot |x(k)| + \sum\limits_{j=0}^{m} h_j(k) \cdot |x(k-j)| \leqslant -M_1 V(k,x(k)) + M_0 \sup\limits_{-m\leqslant j\leqslant 0} V(k+j,x(k+j)) = -G_1(V(k,x(k))) + G_2(\sup\limits_{-m\leqslant j\leqslant 0} V(k+j,x(k+j)))$, 其中 $G_1(s) = M_1 s, G_2(s) = M_0 s$, G_2 单调不减，当 $s > 0$ 时, $G_1(s) > M_0 s, G_2(s) \leqslant M_0 s, 0 \leqslant M_0 < M_1 \leqslant 1$. 故由推论 3 可知方程(14) 的零解一致渐近稳定.

参考文献：

[1] ZHANG Shu-nian. *Stability of infinite delay difference systems* [J]. Nonlinear Analysis, Theory, Method & Application, 1994, **22**(9): 1121—1129.

[2] 唐三一，等. 时滞差分方程中 Razumikhin 型稳定性定理的改进 [J]. 工程数学学报，1999, **16**(1): 71—76.

TANG San-yi, et al. *The improvement of Razumikhin-type stability theorem in delay difference systems* [J]. J. Engi. Math., 1999, **16**(1): 71—76. (in Chinese)

[3] 郑祖庥. 泛函微分方程理论 [M]. 合肥：安徽教育出版社, 1994.

ZHENG Zu-xiu. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. Heifei: Anhui Education Press, 1994. (in Chinese)

[4] HALE J K. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. Springer-Verlag, New York, 1977.

On Razumikhin-Type Stability Theorem of Delay Difference Equations

ZHOU Zong-fu

(Dept. of Math., Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: In this paper we establish new Razumikhin-type stability theorems for infinite and finite delay difference equations. The theorems avoid using the hard-to-find constructing function P and include the related result in [1].

Key words: delay difference equations; uniformly asymptotically stable; Razumikhin-type theorems.