第23卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 1
2003年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2003

赋范线性空间中包含方程可解性定理的推广及弱切锥的应用*

柴 正 猛

(云南民族学院数学与计算机科学系，云南 昆明 650031)

摘　要：本文首先在一般的赋范线性空间中研究了集值映射 $F:X\to Y$ 的平衡点的存在性问题，证明了包含问题 $O\in F(X)$ 的三个可解性定理. 然后在无穷维空间中研究了弱相依锥 $T_i^{\epsilon}(x)$ 的直接像，弱相依导数 $D^{\epsilon}F(x,y)$ 的一个链式法则以及偏 y 弱导数 $D_y^{\epsilon}F(x,y)$ 的弱 Lip 连续性. 最后，作为应用，给出并证明了用弱相依导数 $D^{\epsilon}F(x,y)$ 及弱 P 导数 $P^{\epsilon}F(x,y)$ 判定无穷维自反空间 X 到 Banach 空间 Y 的集值映射 F 是否具有单值性和逆单值性的一个判定定理及其推论.

关键词：序列弱聚点；弱拓扑；切锥.

分类号：AMS(2000) 46T/CLC number：O177.91

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2003)01-0121-08

1 引 言

在数理经济学、最优化及控制论、生物工程等领域中，提出了大量的微分包含问题(参见[1]—[3]). 例如，带状态反馈的控制系统：

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t),u(t)) \\ u\in U(x) \end{cases}$$

可以变为微分包含问题[3]

$$\begin{cases} x'(t)\in F(t,x(t)) \\ F(t,x(t))=\{f(t,x(t),u(t))\mid u\in U(x)\} \end{cases}$$

而对上述系统的研究归结为对微分包含的研究(关于微分包含生存解的研究可参见([2]—[9]). 若在上述方程中令 $y=x'(t)$，则上述微分包含可变为一般的包含方程 $y\in F(x)$，它可以等价地变为集值映射 $G:X\to Y$ 的平衡点问题，其中 $G(x)=F(x)-y$. 在对上述包含问题的研究中，可解性定理发挥了关键的作用. 对有限维空间中的可解性已有相当的研究，文[1] 在无穷维空间中给出了一个可解性定理，本文对文[1] 中提出的定理作了推广，证明了包含问题 0

* 收稿日期：1999-10-03

作者简介：柴正猛(1974-)，男，云南宣威人.

$\in F(x)$ 的三个可解性定理.

在对上述反馈控制系统的研究中,另一个重要的问题是研究解是否可观察,这等价于研究解映射的单值性和逆单值性[4]. 而文献中对无穷维空间的研究还不多见. 为此,本文引入了弱相依锥 $T_K^{\sigma}(x)$、弱 P 锥 $P_K^{\sigma}(x)$ 以及由这些锥所定义的弱相依导数 $D^{\sigma}F(x,y)$、偏 y 弱导数 $D_y^{\sigma}F(x,y)$、弱 P 导数 $P^{\sigma}F(x,y)$ 以及偏导数 $P_x^{\sigma}F(x,y)$ 和 $P_y^{\sigma}F(x,y)$(它们的定义见下节),研究了 $T_K^{\sigma}(x)$ 的直接像、弱相依导数 $D^{\sigma}F(x,y)$ 的链式法则和偏 y 弱导数 $D_y^{\sigma}F(x,y)$ 的弱 Lip 连续性. 最后,作为应用,给出并证明了用弱相依导数 $D^{\sigma}F(x,y)$ 及弱 P 导数 $P^{\sigma}F(x,y)$ 判断从无穷维自反空间到 Banach 空间的集值映射具有局部单逆单值性的判定理及其推论. 这些结果可进一步用于研究无穷维反馈控制系统的可观察性.

2 预备知识

本节将给出文章中用到的基本概念. 在以下讨论中若无特别指明,X,Y 均表示实的赋范线性空间.

定义 2.1 设 $K\subset X, x\in\overline{K}$. 定义 K 在点 X 的弱相依锥 $T_K^{\sigma}(x)$ 为:

$$T_K^{\sigma}(x)=\{v\in X\,|\,v\text{ 是}\frac{K-x}{h}\text{ 当 }h\to 0^+\text{ 时的序列弱聚点}\}.$$

定义 K 在点 x 的弱 P 锥 $P_K^{\sigma}(x)$ 为

$$P_K^{\sigma}(x)=\{v\in X\,|\,v\text{ 是}\frac{K-x'}{h}\text{ 当 }h\to 0^+,x'\to x\text{ 时的序列弱聚点}\}$$

由定义 2.1 不难得到

命题 2.2 (i) $v\in T_K^{\sigma}(x)\Leftrightarrow\exists\ h_n\to 0^+,\exists\ v_n\xrightarrow{W}v$, s. t, $\forall\ n, x+h_nv_n\in K$;

(ii) $v\in P_K^{\sigma}(x)\Leftrightarrow\exists\ h_n\to 0^+,\exists\ x_n\xrightarrow{W}x,\forall\ v_n\xrightarrow{W}v$, s. t, $x_n+h_nv_n\in K$.

定义 2.3 设 $F:X\to Y,(x,y)\in \mathrm{Graph}F$. 其中 $\mathrm{Graph}F=\{(x,y)\,|\,y\in F(x)\}$ 为 F 的图像,则定义 F 在点 (x,y) 的弱相依导数 $D^{\sigma}F(x,y):X\to Y$ 为

$$\mathrm{Graph}(D^{\sigma}F(x,y))=T^{\sigma}_{\mathrm{Graph}F}(x,y).$$

如果 $\mathrm{Graph}(P^{\sigma}F(x,y))=P^{\sigma}_{\mathrm{Graph}F}(x,y)$,则称 $P^{\sigma}F(x,y):X\to Y$ 为 F 在点 (x,y) 的弱 P 导数.

由定义不难得到:

命题 2.4 $v\in D^{\sigma}F(x,y)(u)\Leftrightarrow\exists\ h_n\to 0^+,\exists\ (u_n,v_n)\in\mathrm{Graph}(F),\exists\ (u_n,v_n)\xrightarrow{W}(u,v)$, s. t. ,$\forall\ n,y+h_nv_n\in F(x+h_nu_n)$; $v\in P^{\sigma}F(x,y)(u)\Leftrightarrow\exists\ h_n\to 0^+,\exists\ (x_n,y_n)\xrightarrow{W}(x,y)$, $\exists\ (u_n,v_n)\xrightarrow{W}(u,v)$, s. t. ,$\forall\ n,y_n+h_nv_n\in F(x_n+h_nu_n)$.

定义 2.5 定义 F 在 (x,y) 的偏 y 弱导数 $D_y^{\sigma}F(x,y)$ 为:

$$D_y^{\sigma}F(x,y)(u)=\{v\in Y\,|\,\exists\ h_n\to 0^+,\exists\ u_n\to u,\exists\ v_n\xrightarrow{W}v,\text{s. t. },y+h_nv_n\in F(x+h_nu_n)\},$$

$\forall\ u\in X$

分别定义 F 在 (x,y) 的弱偏导数 $P_x^{\sigma}F(x,y)$ 及 $P_y^{\sigma}F(x,y)$ 为

$$P_x^{\sigma}F(x,y)(u)=\{v\in Y\,|\,\exists\ h_n\to 0^+,\exists\ (u_n,v_n)\xrightarrow{W}(u,v),\exists\ y_n\in F(x),$$

$$y_n \xrightarrow{W} y,\text{s.t.},\ y_n + h_n v_n \in F(x + h_n u_n)\},\ \forall u \in X$$

$$P_y^w F(x,y)(u) = \{v \in Y \mid \exists h_n \to 0^+, \exists (u_n, v_n) \xrightarrow{W} (u,v), \exists x_n \in F(y),$$

$$x_n \xrightarrow{W} x,\text{s.t.},\ y + h_n v_n \in F(x_n + h_n v_n)\},\ \forall u \in X$$

定义 2.6 设 $f:X \to Y$ 是单值映射，称 f 在 $x_0 \in X$ 弱 Dini 可微，若存在连续线性算子(不妨记为) $f_\sigma(x_0) \in L(X,Y)$, s.t. ,$\forall u \in X, \forall h_n \to 0^+, \forall u_n \xrightarrow{W} u$, s.t. ,

$$\frac{f(x_0 + h_n u_n) - f(x_0)}{h_n} \xrightarrow{W} f_\sigma(x_0)(u).$$

定义 2.7 设 $f:X \to Y$ 是单值映射，称 f 在 $(f(x_0),x_0) \in \mathrm{Graphf}^{-1}$ 弱伪 Lip 连续，若 $\exists F(x_0)$ 的领域 $N(f(x_0))$，$\exists l > 0$, s.t. ,$\forall y \in N(f(x_0)), \forall x \in f^{-1}(y), \forall b \in B_{X^*}$，都有

$$|\langle b,x\rangle - \langle b,x_0\rangle| \leqslant l \| y - f(x_0) \|,$$

其中 B_{X^*} 为 X^* 中的单位闭球.

称集值映射 $F:X \to Y$ 在 x_0 弱 Lip 连续，若 $\exists l > 0$, x_0 的邻域 $N(x_0)$, s.t,$\forall x_1, x_2 \in N(x_0), \forall y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(x_2), \forall b \in B_{Y^*}$，有

$$|\langle b,y_1\rangle - \langle b,y_2\rangle| \leqslant L \| x_1 - x_2 \|,$$

其中 B_{Y^*} 为 Y^* 中的单位闭球.

3 主要定理及其证明

首先证明三个可解性定理：

定理 3.1 设 X,Y 都是实的 Banach 空间，K 是 X 的紧凸子集，$F:K \to Y$ 是有闭凸值的上拟连续集值映射，单值映射 $f:X \times X \to R$ 满足：

(i) $\forall x, y \to f(x,y)$ 是凹函数；

(ii) $\forall y, x \to f(x,y)$ 下半连续；

(iii) $\forall y \in K, f(y,y) \leqslant 0$.

设 $B:K \to L(X,Y)$ 为有闭凸值的下半连续集值映射，若存在下半连续选择 A，使得对任意 $P \in Y^*$，当 P 满足：

$$\forall x \in K, \sup_{y \in K}[f(x,y) - \langle p, A(x)(x-y)\rangle] \leqslant 0 \tag{1}$$

时，有 $\sigma(F(x),P) > 0$，则存在 $\bar{x} \in K$, s.t. ,$0 \in F(\bar{x})$.

证明 若结论不对，则 $\forall x \in K$，都有 $0 \notin F(x)$，由分离定理知 $\exists P \in Y^*$, s.t. ,$\sigma(F(x), P) < 0$. 令 $V_p = \{x \in K \mid \sigma(F(x),p) < 0\}, p \in Y^*$，则因 F 上拟连续，故 V_p 是开集. 另外，由于 $\forall x \in K, 0 \notin F(x)$，即 $\forall x \in k, \exists P \in Y^*$, s.t. , $x \in V_p$. 故 K 包含于 $\bigcup_{P \in Y^*} V_p$. 由于 K 紧，故存在 $\{Vp_i\}_{i=1}^n$, s.t. , $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{p_i}$，对上述 $\{Vp_i\}_{i=1}^n$，存在连续单位分解[9]，即，$\exists n$ 个连续函数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, s.t. , $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \sum_{i=1}^n a_1 = 1$，且 $\forall x \in k \backslash V_{p_i}, a_i(x) = 0$. 定义 $\varphi: K \times K \to R: \varphi(x, y) = f(x,y) - \langle \sum_{i=1}^0 a_i(x) P_i, A(x)(x-y)\rangle$，则 $\varphi(x,y)$ 关于 x 下半连续，关于 y 是凹函数，且

$\forall\, y \in K, \varphi(y,y) \leqslant 0$,故由Ky Fan不等式[1]知存在$\bar{x} \in K$,s.t.,$\forall\, y \in K. \varphi(\bar{x},y) \leqslant \sup\limits_{x\in K}\varphi(x,x) \leqslant 0$. 令$\bar{p} = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(\bar{x})p$,则$\bar{p}$满足(1)式,故而$\sigma(F(\bar{x}),\bar{p}) \geqslant 0$.

另一方面,令$I(\bar{x}) = \{I = 1,2,\ldots,n \mid \alpha_i(\bar{x}) > 0\}$,则$I(\bar{x}) \neq \Phi$且$\forall\, i \in I(\bar{x}), \alpha_I(\bar{x}) > 0$,因而$\bar{x} \in \operatorname{supp}(\alpha_i)$包含于$Vp_i, i \in I(\bar{x})$,故$\sigma(F(\bar{x}),\bar{p}_i) < 0, \forall\, i \in I(\bar{x})$. 故

$$\begin{aligned}\sigma(F(\bar{x}),\bar{p}) &= \sigma(F(\bar{x}),\sum_{i\in I(\bar{x})}\alpha_i(\bar{x})P_i) = \sup_{y\in F(\bar{x})} < \sum_{i\in I(\bar{x})}\alpha_i(\bar{x})P_i, y\rangle \\ &= \sum_{i\in I(\bar{x})}\alpha_i(\bar{x})\sigma(F(\bar{x}),P_i) < 0.\end{aligned}$$

这与上式矛盾,故$\exists\, \bar{x} \in K$,s.t.,$0 \in F(\bar{x})$. □

推论 3.2 设X,Y都是实的Banach空间,K是X的紧凸子集,$F:K \to Y$是有闭凸值的上拟连续集值映射,$B:K \to L(X,Y)$是有闭凸值的下半连续集值映射. 若存在B的一个下半连续选择$A:K \to L(X,Y)$满足:

$$\forall\, x \in K, F(x) \cap \overline{A(x)T_k(x)} \neq \varnothing,$$

则$\exists\, \bar{x} \in K$,s.t.,$0 \in F(\bar{x})$.

证明 在定理3.1中令$f(x,y) = 0$,令$\bar{p} = \langle \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(\bar{x}), \varphi(x,y)\rangle = \langle \bar{p}, A(x)(x-y)\rangle$,则$\bar{p}$及$f$满足(1),若能证明$\sigma(F(\bar{x}),\overline{P}) \geqslant 0$,则由定理3.1知结论成立.

事实上$\forall\, y \in K, \varphi(\bar{x},y) = \langle \bar{p}, A(\bar{x})(\bar{x}-y)\rangle \leqslant 0$. 由上式易推知$-A(\bar{x})^*\bar{p} \in N_k(\bar{x})$. 另外,任取$v \in F(\bar{x}) \cap \overline{A(\bar{x})T_K(\bar{x})}$,则$v \in F(\bar{x})$,且存在$u_n \in T_K(\bar{x})$,s.t.,$v = \lim\limits_{n\to\infty}A(\bar{x})u_n$,故

$$\begin{aligned}\sigma(F(\bar{x}),\bar{p}) &= \sup_{u\in F(\bar{x})}\langle \bar{p},u\rangle \geqslant \langle \bar{p},v\rangle = \langle \bar{p}, \lim_{n\to\infty}A(\bar{x})u_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle \bar{p}, A(\bar{x})u_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A(\bar{x})^*\bar{p}, u_n\rangle \geqslant 0.\end{aligned}$$

定理 3.3 设X,Y,K同定理3.4,$F_i:K \to Y\ (i = 1,2,\cdots,m)$是有闭凸值的上拟连续集值映射,$B_j:K \to Y\ (j = 1,2,\cdots,n)$是有闭凸值的下半连续集值映射. 若$\exists\, B_j$的下半连续选择$A_j$,s.t.,

$$\forall\, i = 1,2\cdots,m,\ \forall\, j = 1,2,\cdots,n,\ \forall\, x \in k,\ F_i(x) \cap \overline{A_j(x)T_K(x)} \neq \Phi,$$

则$\forall\, \lambda_i > 0$,$i = 1,2,\cdots,m$,任给$a_i > 0, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$有

1° 存在$B = \sum\limits_{i=1}^{n}a_iB_i$的下半连选择$A$,使得$\forall\, x \in K, F(x) \cap \overline{A(x)T_K(x)} \neq \Phi$;

2° $F = \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_iF_i$存在平衡点,i.e.,$\exists\, \bar{x} \in K$,s.t.,$o \in F(\bar{x})$.

证明 第二个结论可由第一个结论及推论3.2得到,下证明1°成立. 为简便起见,令$m = n = 2, a_1 = a, a_2 = 1-a, \lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \mu$,令$A = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2$,则$A$下半连续,且是$B$的一个选择. 下面证明$A$即为所求. 由条件知$\forall\, x \in K, F_i(x) \cap \overline{A_i(x)T_K(x)} \neq \Phi(i = 1,2, j = 1,2)$,设$V_{ij}$是其中的元素,则由于$F_i(x)(i = 1,2)$是$Y$中的闭凸子集,故$\alpha(\lambda V_{11}) + (1-\alpha)(\lambda V_{12}) \in \lambda F_i$且$\alpha(\mu v_{21}) + (1-\alpha)(\mu v_{22}) \in \mu F_2(x)$. 另外,由于$T_K(x)$是锥,故有$\lambda T_K(x) = \mu T_K(x) = T_K(x)$. 于是

$$\alpha(\lambda V_{11})+(1-\alpha)(\lambda V_{12})\in\lambda F_1(x)\cap(\alpha\overline{A_1(x)(\lambda T_K(x)}+(1-\alpha)\overline{A_2(x)\lambda T_K(x)})$$
$$=\lambda F_1(x)\cap[\alpha\overline{A_1(x)T_K(x)}+(1-\alpha)\overline{A_2(x)\lambda T_K(x)}]=\lambda F_1(x)\cap\overline{A(x)T_K(x)}$$

同理

$$\alpha(\mu V_{21})+(1-\alpha)(\mu V_{22})\in\mu F_2(x)\cap[\alpha\overline{A_1(x)T_K(x)}+(1-\alpha)\overline{A_2(x)T_K(x)}]$$
$$=\mu F_2(x)\cap\overline{A(x)T_K(x)}$$

故 $\alpha(\lambda V_{11}+\mu V_{21})+(1-\alpha)(\lambda V_{12}+\mu V_{22})\in F(x)\cap\overline{A(x)T_K(x)}$. □

关于切锥 $T_K(x)$ 和 $P_K(x)$ 以及相应的导数的性质，已有很多研究(见[1],[2],[4]). 而关于无穷维空间中的弱切锥 $T_K^\sigma(x)$ 和 $P_K^\sigma(x)$ 以及相应的弱导数，文献中研究较少. 本节将在无穷锥自反空间中研究弱切锥和弱导数的性质，并给出其应用.

首先给出并证明关于弱相依锥 $T_K^\sigma(x)$ 的直接像的一个定理：

定理 3.4 设 X 是自反 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$K\in X$，$f:K\to Y$ 是单值映射，并且弱 Dini 可微，$y_0\in f(K)$，$x_0\in K\cap f^{-1}(y_0)$，设 $\exists\ \varepsilon>0$，s.t.，$f^{-1}(B(y_0,\varepsilon))\cap K$ 列紧，且条件 $\forall\ x\in f^{-1}(y_0)\cap\overline{K}$，$\ker(f_\sigma(x))\cap T_K^\sigma(x)=\{0\}$ 成立，则

$$\bigcup_{x\in\overline{K}\cap f^{-1}(y_0)}f_\sigma(x)(T_K^\sigma(x))=T_{f(K)}^\sigma(y_0).\tag{2}$$

证明 先证(2)式左包含于右，设 $V\in$ 左，则

$$\exists\ x^*\in\overline{K}\cap f^{-1}(y_0)\ \text{s.t.},\ v\in f_\sigma^\Omega(x^*)(T_K^\sigma(x^*)).$$

易证明 $v\in T_{f(K)}^\sigma(f(x^*))=T_{f(x)}^\sigma(y_0)$.

再证(2)式右包含于左. 设 $v\in T_{f(K)}^\sigma(y_0)$. 若 $v=0$ 则命题显然成立，下设 $v\neq0$，则存在 $h_n\to0^+$，$\exists\ v_n\xrightarrow{W}v$ 及 $\exists\ x_n\in K$，s.t.，$y_0+h_nv_n=f(K)$，且当 n 充分大时有

$$\|f(x_n)-y_0\|=h_n\|v_n\|<\varepsilon$$

即可以使 $x_n\in f^{-1}(B(y_0,\varepsilon))\cap K$，由题设知该集合是列紧的，故 x_n 存在子列(仍记为)$x_n\to x\in\overline{K}$，且满足 $f(x)=y_0$. 令 $\alpha_n=\|x_n-x\|$，$u_n=\dfrac{x_n-x}{\alpha_n}$，则 $\alpha_n\to0^+$，且由于 X 自反，u_n 有子列(仍记为)$u_n\xrightarrow{W}u\neq0$，故应有 $\dfrac{\alpha_n}{h_n}>0$. 另外，显然有

$$v_n=\frac{f(x_n)-f(x)}{h_n}=\frac{f(x+\alpha_nu_n)-f(x)}{\alpha_n}\frac{\alpha_n}{h_n},\tag{3}$$

上式中，左端 $v_n\xrightarrow{W}v\neq0$，故应有 $\dfrac{\alpha_n}{h_n}>0$，且右端有界. 又因

$$\frac{f(x+\alpha_nu_n)-f(x)}{\alpha_n}\xrightarrow{W}f_\sigma(x)u\neq0,$$

故 $\{\dfrac{\alpha_n}{h_n}\}$ 是有界数列，故有子列(仍记为) $\dfrac{\alpha_n}{h_n}\to\lambda>0$. 由(3)式易得 $v=f_\sigma(x)(\lambda u)$. 又 $T_K^\sigma(x)$ 是锥，故 $\lambda u\in T_K^\sigma(x)$，故 $v\in$ 左端. □

下证弱导数的链式法则及弱 Lip 连续性定理

定理 3.5 设 X,Y,Z 是三个赋范线性空间，其中 Y 自反. $G:X\to Y$ 及 $H:Y\to Z$ 是二集值映射，且 G 在 x 弱 Lip 连续，$G(x)$ 是 Y 中弱有界闭集，则

$$D^\sigma(HoG)(x,z)(u)\subset\bigcup_{y\in G(x)}(P_z^\sigma H(y,z))(P_x^\sigma G(x,y))(u),\tag{4}$$

其中$(HoG)(x)=\bigcup_{y\in G(x)}H(y)$.

证明 设$w\in D^{e}(HoG)(x,z)(u)$，根据弱相依导数的定义知$\exists\ h_n\to 0^+$，$\exists\ u_n\xrightarrow{W}u$，$\exists\ w_n\xrightarrow{W}w$，s.t. $\forall\ n$，$z+h_nw_n\in(HoG)(x+h_nu_n)$，于是$\exists\ y_n\in G(x+h_nu_n)$，使得$z+h_nw_n\in H(y_n)$. 由于$G$在$x$弱Lip连续，故

$\exists\ l>0$，$\exists\ y_n^0\in G(x)$，s.t. $\forall\ b\in B_{Y^*}$，$|\langle b,y_n-y_n^0\rangle|\leqslant l\|x+h_nu_n-x\|=lh_n\|u_n\|$

记$v_n=\dfrac{y_n-y_n^0}{h_n}$，则由上式可知$|\langle b,v_n\rangle|<+\infty$，由共鸣定理知$\|v_n\|<+\infty$，即$\{v_n\}$是有界点列. 由于$Y$是自反空间，故存在子列(仍记为)$v_n\xrightarrow{W}v$，又因$G(x)$是$Y$中弱有界闭集，故$y_n^0$存在子列(仍记为)$y_n^0\xrightarrow{W}y\in G(x)$，由关系式

$$y_n^0+h_nv_n=y_n\in G(x+h_nu_n)\&z+h_nw_n\in H(y_n)=H(y_n^0+h_nv_n)$$

知$w\in P_z^eH(y,z)$且$v\in P_z^eG(x,y)(u)$.

定理3.6 设X,Y是二赋范线性空间，Y为自反空间，$F:X\to Y$为集值映射，$(x,y)\in\mathrm{Graph}F$，F弱Lip连续，则：(i)$\mathrm{Dom}(D_y^eF(x,y))=X$；(ii) $D_y^eF(x,y)$是弱Lip连续的.

证明 先证(i). 设$u\in X$，因$F(x)$弱Lip连续，故$\exists\ l>0$，$\exists\ x$的邻域$N(x)$，s.t.，$\forall\ h_n\to 0$，当n充分大时，有$x+h_nu\in N(x)$，且$\forall\ y\in F(x)$，$\forall\ y_n\in F(x+h_nu)$，$\forall\ b\in B_{Y^*}$，有

$$|\langle b,y_n-y\rangle|\leqslant l\|x+h_nu-x\|=lh_n\|u\|$$

记$v_n=\dfrac{y_n-y}{h_n}$，由上式知$|\langle b,v_n\rangle|<+\infty$，由共鸣定理知$\{v_n\}$是$Y$中有界点列. 由于空间自反，故$\{v_n\}$有子列(仍记为)$\{v_n\}$，使$v_n\xrightarrow{W}v$. 由于$y+h_nv_n=y_n\in F(x+h_nu)$，故$v\in D_y^eF(x,y)(u_i)(i=1,2)$，即$u\in\mathrm{Dom}D_y^eF(x,y)$.

再证(ii). $\forall\ u_i\in X$，$i=(1,2)$，要证$\forall\ v_i\in D_y^e(x,y)(u_i)(i=1,2)$有

$$|\langle b,v_1\rangle-\langle b,v_2\rangle|\leqslant l\|u_1-u_2\|$$

事实上，根据偏y弱导数的定义知

$$\exists\ h_n\to 0^+,\ \exists\ u_n'\to u_i,\exists\ v_n^{(i)}\xrightarrow{W}v_i,\text{s.t.},\ y+h_nv_n^{(i)}\in F(x+h_nu_n^{(i)}),\ i=1,2$$

由F的弱Lip连续性及三角不等式知

$$|\langle b,v_1\rangle-\langle b,v_2\rangle|\leqslant|\langle b,v_1\rangle-\langle b,v_n^{(1)}\rangle|+|\langle b,v_n^{(2)}\rangle|-\langle b,v_n^{(2)}\rangle+|\langle b,v_n^2\rangle-\langle b,v_2\rangle|$$

$$=I+\frac{1}{h_n}|\langle b,y+h_nv_n^{(1)}\rangle-\langle b,y+h_nv_n^{(2)}\rangle|+\mathrm{I\!I}\leqslant I+\frac{1}{h_n}L\|x+h_nu_n^{(1)}-x-h_nu_n^{(2)}\|+\mathrm{I\!I}$$

$$=I+l\|u_n^{(1)}-u_n^{(2)}\|+\mathrm{I\!I}\leqslant I+l\|u_n^{(1)}-u_1\|+l\|u_1-u_2\|+l\|u_2-u_1^{(2)}\|+\mathrm{I\!I}$$

$$=I+\mathrm{I\!I\!I}+l\|u_1-u_2\|+\mathrm{IV}+\mathrm{I\!I}.$$

由$v_n^{(i)}\xrightarrow{W}v_i(i=1,2)$知$\forall\ \varepsilon>0$，当$n$充分大时，可以使$\mathrm{I}<\dfrac{\varepsilon}{4}$，$\mathrm{I\!I}<\dfrac{\varepsilon}{4}$同时成立，又由$u_n^{(i)}\to u_i(i=1,2)$知对上述$\varepsilon>0$，当$n$充分大时可以使上式中的$\mathrm{I\!I\!I}<\dfrac{\varepsilon}{4}$及$\mathrm{IV}<\dfrac{\varepsilon}{4}$成立，故当$n$充分大时，有

$$|\langle b,v_1\rangle-\langle b,v_2\rangle|\leqslant\varepsilon+l\|u_1-u_2\|.$$

由ε的任意性知$|\langle b,v_1\rangle-\langle b,v_2\rangle|\leqslant l\|u_1-u_2\|$，即$D_y^eF(x,y)$弱Lip连续.

设 X,Y 是二赋范线性空间，$F:X\to Y$ 是一集值映射，称 F 在 $(x^*,y^*)\in \mathrm{Graph}F$ 具有逆单值性，如果存在 x^* 的领域 $N(x^*)$，使得 $F^{-1}(y^*)\cap N(x^*)=\{x^*\}$；称 F 在 $x^*\in X$ 具有局部单值性，如果存在 x^* 的领域 $N(x^*)$，使得 $\forall\ x_1,x_2\in N(x^*)$，若 $x_1\neq x_2$，则 $F(x_1)\cap F(x_2)=\Phi$.

下证逆单值性及局部单值性定理：

定理 3.7　设 X,Y 是二赋范线性空间，其中 X 是自反空间. $F:X\to Y$ 是集值映射.

1° 设 $(x^*,y^*)\in \mathrm{Graph}F$，若对任意给定的弱闭锥 P，有 $\mathrm{Ker}(D^\sigma F(x^*,y^*))\cap P=\{0\}$，则存在 $\varepsilon>0$, s.t., $F^1(y^*)\cap[(x^*+\varepsilon(P\cap B)]=\{x^*\}$. 即 F 在 (x^*,y^*) 具有逆单值性.

2° 设 $K\subset X$，$x_0\in K$ 给定. 若 $\exists\ \delta>0$, s.t, $F(x_0+\delta_B)$ 弱相对紧且 $\mathrm{Graph}F$ 是弱闭集，且 $\forall\ y\in F(x_0)$，$P_k^\sigma(x_0)\cap\ker(P^\sigma F(x_0,y))=\{0\}$，则 $\exists\ x_0$ 的领域 $N(x_0)$, s.t. $\forall\ x_1,x_2\in N(x_0)\cap K$，$x_1\neq x_2$，都有 $F(x_1)\cap F(x_2)=\Phi$，即 F 在 x^* 具有局部单值性.

证明　先证 1°(反证法). 若不然，则 $\exists\ x_n\in F^{-1}(y^*)$, s.t. $\|x_n-x^*\|\leqslant\frac{1}{n}$，$x_n-x^*\neq 0$，且 $x_n-x^*\in\frac{1}{n}P=P$（因 P 是锥）. 令 $h_n=\|x_n-x^*\|$，则 $h_n\to 0^+$，令 $u_n=\frac{x_n-x^*}{h_n}$，则 $u_n\in B$. 又因 $x_n-x^*\in P$，故 $u_n\in P$，由于空间自反，且 P 是弱闭锥，故 $\{u_n\}$ 有子列（仍记为）$\{u_n\}$，使得 $u_n\xrightarrow{W}u\in P$，且 $u\neq 0$. 由 $y^*\in F(x_n)$ 知 $y^*+h_n o\in F(x_n)=F(x^*+h_nu_n)$，故 $0\in D^\sigma F(x^*,y^*)(u)$，故 $u\in \mathrm{Ker}D^\sigma F(x^*,y^*)\cap P$，这与已知条件矛盾，故 F 有逆单值性.

再证 2°(反证法). 若不然，则 $\exists\ x_n^1,x_n^2\in K\cap B(x_0,\frac{1}{n})$，$x_n^1\neq x_n^2$，但 $F(x_n^1)\cap F(x_n^2)$ 非空，即存在 $y_n\in F(x_n^1)\cap F(x_n^2)$. 令 $h_n=\|x_n^1-x_n^2\|$，$u_n=\frac{x_n^1-x_n^2}{h_n}$，则 $h_n\to 0^+$，$u_n\in Bx$，由于空间自反，故 $\{u_n\}$ 有子列（仍记为）$\{u_n\}$，使得 $u_n\xrightarrow{W}u\neq 0$，由关系式 $x_n^2+h_nu_n=x_n^1\in K$ 知 $u\in P_K^\sigma(x_0)$，又当 n 充分大时有 $y_n\in F(x_n^2+h_nu_n)\cap F(x_n^2)\subset F(x_0+\delta_B)$. 由题设条件知 $F(x_0+\delta_B)$ 弱紧，故 $\{y_n\}$ 存在子列（仍记为）$\{y_n\}$，使

$$y_n\xrightarrow{W}y^*\in F(x_0)\tag{5}$$

由包含关系式 $y_n+h_{n0}\in F(x_n^2+h_nu_n)$ 知 $0\in P^\sigma F(x_0,y^*)(u)$，故

$$u\in\ker(P^\sigma F(x_0,y^*))\cap P_K^\sigma(x_0)$$

而由(5)式知 $y^*\in F(x_0)$，这与题设矛盾，故 F 在 x_0 有局部单值性.

下面给出定理的一个推论：

推论 3.8　设 X,Y 及 F 如定理 3.7 所述，则

1° 若 $(x^*,y^*)\in \mathrm{Graph}F$，且 $\mathrm{Ker}(D^\sigma F(x^*,y^*))=\{0\}$，则 F 在 (x^*,y^*) 具有逆单值性.

2° 设 $x_0\in X$ 给定，若存在 $\delta>0$, s.t. $F(x_0+\delta_B)$ 弱相对紧，且 $\mathrm{Graph}F$ 弱闭，且 $\forall\ y\in F(x_0)$，$\mathrm{Ker}(P^\sigma F(x_0,y))=\{0\}$，则 F 在 x_0 具有局部单值性.

证明　分别在定理 3.7 的 1° 中取 $P=X$，在 2° 中取 $K=X$.　□

参考文献：

[1]　AUBIN J P, FRANKOWSKA H. *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Basel, 1991. Optim, 27, pp. 949

—975. 1989.

[2] AUBIN J P. *A survey of viability theory* [J]. SIAM J. Control Optim, 1990, **28**: 749—788.

[3] 史树中. 微分包含与经济均衡 [J]. 高校应用数学学报, 1986, **1**: 131—142.
SHI Shu-zhong. *Differential inclusion and economics equilibrium* [J]. Appl. Math. J. Chinese Univ., 1986, **1**: 131—142. (in Chinese)

[4] AUBIN J P, FRANKOWSKA H. *Observability of system under uncentainty* [J]. SIAM J. Control Optim, 1990, **28**: 749—788.

[5] 杨富春. 不变集与非凸非自治微分包含的生存解 [J]. CSIAM'96 II:38,192—197.
YANG Fu-chun. *Invalid set and viable solutions of nonconvex nonautonomous differential inclusions* [J]. CSIAM'96 II: 38, 192—197. (in Chinese)

[6] 杨富春. 非凸集值映射的包含切性及应用 [J]. 数学学报, 1996, **39**: 659—665.
YANG Fu-chun. *Tangent properties of inclusions for nonconvex set-valued maps and applications* [J]. Acta Math. Sinica, 1996, **39**: 659—665. (in Chinese)

[7] 王志华. 生存轨道与集值映像的不动点 [J]. 数学研究, 1997, **39**: 269—271.
WANG Zhi-hua. *Viable trajectories and fixed points of set-valued maps* [J]. J. Math. Study, 1997, **39**: 269—271. (in Chinese)

[8] CARDALIAGUET P, QUINCAMPOIX M, SAINT-PIERRE P. *Times for constrained nonlinear control problems without local controllability* [J]. Appl. Math. Optim, **36**: 21—42.

[9] AUBIN J P. 应用泛函分析(中译本) [M]. 台北:赖汉卿,译, 1985.
AUBIN J P. *Applied Functional Analysis* [M]. Taibei: translated by Lai Hanqing, 1985. (in Chinese)

The Extensions of the Solvable Theorem of Inclusion Equation and the Applications of the Weak Tangent Cones in Normed Linear Space

CHAI Zheng-meng

(Math. Dept. of Yunnan Inst. of Nationalities, Kunming 650031, China)

Abstract: In this paper, we first studied the existence of the equilbrum of the set-valued map $F: X \to Y$ from Banach space X to Banach space Y, and got three solvable theorems of the inclusion $0 \in F(x)$, which extended the theorem of [1]. Then, in infinite dimensional linear normed space, we studied the direct image of the weak contingent cone $T_K^\sigma(x)$, the chain rule of the weak contingent derivative $D^\sigma F(x,y)$, and the weak lipschitz continuity of the y-weak derivative $D_y^\sigma(x,y)$. Finally, as an application, by using $D^\sigma(x,y)$ and the weak paratingent derivative $P^\sigma F(x,y)$, we proved a theorem and its corollary concerning whether $F: X \to Y$ from reflexive space X to Banach space Y is locally injective and whether it is inversely injective.

Key words: weak sequence cluster; weak topology; tangent cone.