第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

诱导导算子与上(下)半连续函数*

方 进 明
(青岛海洋大学应用数学系,山东 青岛 266003)

摘 要:本文首先研究出经典拓扑诱导的导算子的性质,给出其分解定理;其次用该诱导导算子给出格值上(下)半连续函数的若干刻画条件.

关键词:拓扑;导集;诱导导算子;上(下)半连续函数.
分类号:AMS(2000) 54A,06D/CLC number:O189,O157
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2003)01-0133-04

1 预 备

本文用 (X,T) 记经典拓扑空间,其中 X 非空集合,而 T 是 X 上的拓扑. L 记完备的完全分配格,不要求其有逆序对合对应. L 有最大元和最小元,分别记作 1 和 0. L^X 记 X 上所有 LF 集全体. M 或 M^* 分别记 L 和 L^X 中非零并既约全体, M 或 M^* 中的元有时均称作点. L^X 中恒取值 $a\in L$ 的 LF 集仍记作 a,而恒取 0 和 1 的 LF 记作 φ 和 X. 本文在记法上将不区分经典集合与其特征函数. $\forall a,b\in L$,定义 $a\ll b$ 当且仅当对 L 中任意满足 $b\leqslant \vee C$ 的非空集 $C\subseteq L$, $\exists c\in C$ 使得 $a\leqslant c$. 易证 L 是完全分配格当且仅当 $\forall a\in L, a=\vee\{b\in L; b\ll a\}$. 此外, $\forall a\in L^X, a\in L$,用 $\beta(a)$ 和 $\alpha(a)$ 分别记 $a\in L$ 的最大极小集和最大极大集[1]. 显然 $\forall b\in L, b\ll a\Rightarrow b\in\beta(a)$, $\forall A\subseteq X$, A 在 (X,T) 的导集记作 $d(A)$. 另记

$$A_{[a]}=\{x\in X; a\leqslant A(x)\};\ A_{(a)}=\{x\in X; A(x)\not\leqslant a\}.$$

为本文完整,引用以下已知结果.

引理 1.1[2] 设 (X,T) 为拓扑空间, $A\in L^X$. 定义算子 $d_T: L^X\to L^X$ 如下:

$$\forall x\in X, d_T(A)(x)=\bigwedge_{U\in B(x)}\bigvee_{y\in U-\{x\}}A(y),$$

其中 $B(x)$ 是点 $x\in X$ 在 (X,T) 中的任意开邻域基. 则 d_T 具有性质:

(1) $d_T(\varphi)=\varphi$;

(2) $\forall x_\lambda\in M^*, x_\lambda\not\leqslant d_T(x_1)$;

(3) $\forall A,B\in L^X, d_T(A\vee B)=d_T(A)\vee d_T(B)$;

(4) $\forall A\in L^X, (d_T(A))_{[a]}=\bigcap_{b\ll a}d(A_{[b]})$.

---

* 收稿日期:2000-01-10
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(Q99A02)
作者简介:方进明(1961-),男,教授.

注意，引理 1.1 中定义的算子 d_T 将在本文中称作诱导导算子.

定义 1.2[3]　映射 $g: L^X \to L^X$ 称为 L^X 上的导算子，如果 g 满足如下条件

(1) $g(\varphi) = \varphi$;

(2) $\forall\, x_\lambda \in M^*, x_\lambda \not\leqslant g(x_1)$;

(3) $\forall\, A, B \in L^X, g(A \vee B) = g(A) \vee g(B)$;

(4) $\forall\, A \in L^X, g(g(A)) \leqslant A \vee g(A)$.

定义 1.3[4]　设 (X, T) 为拓扑空间. (1) $f: X \to L$ 称作上半连续，若 $\forall\, a \in L, f_{[a]}$ 在 (X, T) 中是闭集; (2) $f: X \to L$ 称为下半连续，若 $\forall\, a \in L, f_{(a)}$ 在 (X, T) 中是开集.

2　诱导导算子的性质与分解定理

本部分将首先给出诱导导算子若干性质，然后证明其分解定理.

引理 2.1　设 d_T 是如引理 1.1 定义的诱导导算子. 则 $\forall\, A \in L^X$,

$$d_T(d_T(A)) \leqslant A \vee d_T(A).$$

证明　首先证明等式 $JJ(A) = J(A)$，其中 $J: L^X \to L^X$ 如下,

$$\forall\, A \in L^X, \forall\, x \in X, J(A)(x) = \bigwedge_{U \in B(x)} \bigvee_{y \in U} A(y).$$

显然 $J(A) \leqslant JJ(A)$ 且 $d_T(A) \leqslant J(A)$. 为证相反的不等式，我们令 $a = JJ(A)(x)$. 由

$$a = JJ(A)(x) = \bigwedge_{U \in B(x)} \bigvee_{y \in U} J(A)(y)$$

知, $\forall\, U \in B(x)$, $\bigvee_{y \in U} J(A)(y) \geqslant a$. 由 $\beta(a)$ 的定义知, $\forall\, \lambda \in \beta(a), \exists\, y \in U$, 使得 $J(A)(y) \geqslant \lambda$, 或 $\lambda \leqslant \bigwedge_{V \in B(y)} \bigvee_{z \in V} A(z)$. 任取定 $W \in B(y)$ 使 $y \in W \subseteq U$, 则 $\lambda \leqslant \bigvee_{z \in W} A(z) \leqslant \bigvee_{z \in U} A(z)$. 故证得 $\forall\, U \in B(x), \lambda \leqslant \bigvee_{z \in U} A(z)$. 由此可得 $\lambda \leqslant J(A)(x) = \bigwedge_{U \in B(x)} \bigvee_{y \in U} A(y)$. 从而 $\forall\, x \in X, J(A)(x) \geqslant \vee\, \beta(a) = a = J(J(A))(x)$ 或 $J(A) \geqslant J(J(A))$. 至此证得 $JJ(A) = J(A)$. 由因为 L 满足分配律，有 $\forall\, x \in X$,

$$\begin{aligned} A \vee d_T(A)(x) &= A(x) \vee d_T(A)(x) = A(x) \vee \Big(\bigwedge_{U \in B(x)} \bigvee_{y \in U - \{x\}} A(y)\Big) = \bigwedge_{U \in B(x)} \bigvee_{y \in U} A(y) \\ &= J(A)(x) \geqslant JJ(A)(x) \geqslant d_T(J(A))(x) \geqslant d_T(d_T(A))(x). \end{aligned}$$

故证得结论.

推论 2.2　若 d_T 是如引理 1.1 定义的诱导导算子. 则 $d_T: L^X \to L^X$ 是 L^X 上的导算子.

推论 2.3　设 $r \in L$ 满足 $\vee\, \Gamma \geqslant r \Rightarrow \exists\, a \in \Gamma$ 使得 $a \geqslant r$ 成立，其中 $\Gamma \subseteq L$, 则 $\forall\, A \in L^X$,

$$(d_T(A))_{[r]} = d(A_{[r]}).$$

证明　$\forall\, x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in (d_T(A))_{[r]} &\Leftrightarrow r \leqslant d_T(A)(x) = \bigwedge_{U \in B(x)} \bigvee_{y \in U - \{x\}} A(y) \\ &\Leftrightarrow \forall\, U \in B(x), r \leqslant \bigvee_{y \in U - \{x\}} A(y) \\ &\Leftrightarrow \forall\, U \in B(x), \exists\, y \in U - \{x\}, r \leqslant A(y) \\ &\Leftrightarrow \forall\, U \in B(x), U - \{x\} \cap A_{[r]} \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in d(A_{[r]}) \end{aligned}$$

推论 2.4　设 (X, T) 是拓扑空间, L 是完备的完全分配格, $a \in L$ 满足 $\forall\, \Gamma \subseteq L$, $\vee\, \Gamma \geqslant a$ 时，存在 $b \in \Gamma$ 使 $a \leqslant b$, 则 $\forall\, A \in L^X, d(\bigcap_{b \ll a} A_{[b]}) = \bigcap_{b \ll a} (d_T(A))_{[b]}$.

证明　一般地，我们有 $\bigcap_{b\ll a} A_{[b]} = A_{[a]}$. 所以用推论 2.3 得

$$d(\bigcap_{b\ll a} A_{[b]}) = d(A_{[a]}) = (d_T(A))_{[a]} = \bigcap_{b\ll a}(d_T(A))_{[b]}.$$

定理 2.5　设 (X,T) 是 T_1 型拓扑空间，$A \in L^X$，则 $\forall\, a \in L, d(d_T(A)_{[a]}) \subseteq (d_T(A))_{[a]}$.

证明　设 $x \in X$ 满足 $x \in d(d_T(A)_{[a]})$，则 $\forall\, U \in B(x), U - \{x\} \cap d_T(A)_{[a]} \neq \varnothing$. 故 $\exists\, y \in U - \{x\}$ 使得 $a \leqslant d_T(A)(y) = \bigwedge_{V\in B(y)} \bigvee_{z\in V-\{y\}} A(z)$. 进一步地有 $\forall\, V \in B(y)$, $\bigvee_{z\in V-\{y\}} A(z) \geqslant a$. 任取定 $W \subseteq B(y)$ 使 $y \in W \subseteq U - \{x\}$（因 X 是 T_1 空间，从而 $U - \{x\}$ 是开的）. 对此 W 仍然有 $a \leqslant \bigvee_{z\in W-\{y\}} A(z)$. 从而 $\forall\, b \ll a, \exists\, z \in W - \{y\} \subseteq U - \{x\}$ 使得 $b \leqslant A(z)$，或 $(W - \{y\}) \cap A_{[b]} \neq \varnothing$. 进而 $(U - \{x\}) \cap A_{[b]} \neq \varnothing$. 上述证明表明 $\forall\, b \ll a, x \in d(A_{[b]})$. 最后由引理 1.1(4) 证得 $x \in \bigcap_{b\ll a} d(A_{[b]}) = (d_T(A))_{[a]}$.

定理 2.6（分解定理）　设 (X,T) 是拓扑空间，则 $\forall\, A \in L^X$，有

(1) $d_T(A) = \bigvee_{a\in L}(a \wedge d(A_{[a]}))$；(2) $d_T(A) = \bigwedge_{a\in L}(a \vee d(A_{(a)}))$.

证明　仅证(2) 如下，(1) 类似可证.

任取定 $x \in X$. 若 $\forall\, a \in L, x \in d(A_{(a)})$，则 $d_T(A)(x) \leqslant 1 = \bigvee_{a\in L}(a \wedge d(A_{(a)}))(x)$. 否则

$$\bigwedge_{a\in L}(a \vee d(A_{(a)}))(x) = \wedge\ \{a \in L; x \notin d(A_{(a)})\}.$$

当 $x \notin d(A_{(a)})$ 时，$\exists\, U \in B(x)$ 使得 $(U - \{x\}) \cap A_{(a)} = \varnothing$. 从而 $\vee\ A_{y\in U-\{x\}}(y) \leqslant a$. 由 d_T 的定义得 $d_T(A)(x) \leqslant a$，由此推得

$$d_T(A)(x) \leqslant \wedge\ \{a \in L; x \notin d(A_{(a)})\} = \bigwedge_{a\in L}(a \vee d(A_{(a)})(x)).$$

证得 $d_T(A) \leqslant \bigvee_{a\in L}(a \vee d(A_{(a)}))$.

反之，设 $d_T(A)(x) = c$ 且 $r \in \alpha(c)$，则 $\exists\, U \in B(x)$ 使得 $\bigvee_{y\in U-\{x\}} A(y) \leqslant r$，等价地有 $(U - \{x\}) \cap A_{(r)} = \varnothing$. 因此得

$$x \notin d(A_{(r)}) \Rightarrow \bigwedge_{a\in L}(a \vee d(A_{(a)})(x)) \leqslant r \Rightarrow \bigwedge_{a\in L}(a \vee d(A_{(a)})(x)) \leqslant c = d_T(A)(x).$$

证得 $d_T(A) \geqslant \bigvee_{a\in L}(a \vee d(A_{(a)}))$. 由上述两方面证得(2).

3　上（下）半连续函数的刻画条件

本部分将主要地讨论上半连续函数的刻画条件，而下半连续函数的刻画条件将不作深入讨论. 但有关结论不难平行地得到.

定理 3.1　设 (X,T) 时 T_1 型拓扑空间，$A \in L^X$，则 $d_T(A): X \to L$ 是上半连续的.

证明　用定理 2.5 有，$\forall\, a \in L, (d_T(A)_{[a]})^- = d_T(A)_{[a]} \vee d(d_T(A)_{[a]}) = d_T(A)_{[a]}$. 此处 $(d_T(A)_{[a]})^-$ 记 $d_T(A)_{[a]}$ 在 (X,T) 的闭包. 从而 $\forall\, a \in L, d_T(A)_{[a]}$ 是闭集. 由定义 1.3 知，结论成立.

定理 3.2　设 L 是完备格，(X,T) 是拓扑空间. 则 $\forall\, A \in L^X$，当 $d_T(A) \leqslant A$ 时，$A: X \to L$ 必上半连续；当 L 完备的完全分配格时，反之成立.

证明　首先设 $A \in L^X$ 满足 $d_T(A) \leqslant A$. 令 $K_a = A_{[a]}(\forall\, a \in L)$ 且 $x \notin K_a$. 故 $a \nleq A(x)$，进而 $a \nleq d_T(A)(x) = \bigwedge_{U\in B(x)} \bigvee_{y\in U-\{x\}} A(y)$. 由此推得 $\exists\, U \in B(x), a \nleq \bigvee_{y\in U-\{x\}} A(y)$. 故 $\forall\, y \in U - \{x\}$ 使得 $a \nleq A(y)$，或 $U \cap Ka = \varnothing$（注意 $x \notin K_a$）. 从而 $x \notin K_a^-$. 证得 $\forall\, a \in L, K_a$ 是闭

的.由定理 1.3 此时 A 是上半连续的.

反之,当 L 是完备的完全分配格时,设 A 是上半连续函数,则 $\forall\, b \ll a(a \in L)$,$A_{[b]}$ 是(X,T) 中的闭集,从而 $d(A_{[b]}) \subseteq A_{[b]}$.再考虑引理 1.1(4) 可得

$$d_T(A)_{[a]} = \bigcap_{b \ll a} d(A_{[b]}) \subseteq \bigcap_{b \ll a} A_{[b]} \subseteq A_{[a]}.$$

故 $\forall\, a \in L, \forall\, x \in X, d_T(A)(x) \geqslant a$ 可推得 $A(x) \geqslant a$.最后证得 $d_T(A) \leqslant A$.

推论 3.4 设 L 是完备的完全分配格,则对任意拓扑空间,$A: X \to L$ 是上半连续当且仅当 $d_T(A) \leqslant A$.

定理 3.4 设 L 是完备的完全分配格,X 是拓扑空间,$A \in L^X$.如果 $B = A \vee d_T(A)$ 其中 $\forall\, x \in X, B(x) = A(x) \vee d_T(A)(x)$,则 $B: X \to L$ 是上半连续的.

证明 由引理 1.1(3) 和引理 2.1 知 $d_T(B) = d_T(A) \vee d_T(d_T(A)) \leqslant A \vee d_T(A) = B$.由定理 3.2 可推得 B 是上半连续的.

参考文献:

[1] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安:陕西师范大学出版社, 1988.
WANG Guo-jun. *Theory of L-Fuzzy Topological Spaces* [M]. Xi'an: Shaanxi Normal University Press, 1988. (in Chinese)

[2] 方进明. 诱导空间中导算子的分析式与层次刻画 [J]. 科学通报, 1996, **41**(1): 1-2.
FANG Jin-ming. *Characterizations of derived operators in induced spaces by stratification* [J]. Chinese Sci. Bull., 1996, **41**(1): 1-2. (in Chinese)

[3] 史富贵. LF 导算子与 LF 拓扑 [J]. 烟台师范学院学报(自), 1994, **10**: 161-166.
SHI Fu-gui. *L-fuzzy derived operator and L-fuzzy topology* [J]. J. of Yantai Teacher's University (Natural), 1994, **10**: 161-166. (in Chinese)

[4] LIU Ying-ming, LUO Mao-kang. *Separations in lattice-valued induced spaces* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, **36**: 55-66.

Induced Derived Operator and Upper Semi-Continuous Mappings

FANG Jin-ming
(Dept. of Math., Ocean University of Qingdao, Shandong 266003, China)

Abstract: In this paper, we study the properties of the derived operator induced by classical topology, and show the decomposition theorem of this derived operator. In addition, by using the induced derived operator, we give some of equivalent conditions of lattice-valued upper semi-continuous mappings.

Key words: topology; derived set; induced derived operator; upper semi-continuous mapping.