第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

关于 Kelly 问题和 Wolliam Kruskal 猜想的注记*

林 波， 左铨如
(扬州大学理学院数学系，江苏 扬州 225002)

摘 要：对文[1]中 Kelly 的第18个问题，本文证明了 $p \leqslant d$ 及 $d=2, p=3,4$ 和 $d=3, p=4,5$ 时 Wolliam Kruskal 猜想成立，并给出了 $m(d,p)$ 的最小值，同时也给出了含10个变量的非线性规划问题的一种解法.

关键词：非线性规划；球面几何；不等式.
分类号：AMS(2000) 51K05/CLC number：O184
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0137-06

1 引 言

1974年，Kelly 在文[1]中提出的第18个问题是：

在 d 维欧氏空间 E^d 中，$e_1, e_2, \cdots, e_p$ 为两两相互夹角皆不超过 $\frac{\pi}{2}$ 的 p 个单位向量，$m(d,p)$ 表示向量和 $\sum_{i=1}^{p} e_i$ 的模 $\left|\sum_{i=1}^{p} e_i\right|$，则 $m(d,p)$ 何时有最小值？对此问题，Wolliam Kruskal 猜想 $m(d,p)$ 的最小值 m 满足不等式

$$p^2 \leqslant dm^2 \leqslant p^2 + r(d-r), \tag{1}$$

其中 $p = kd + r, 0 \leqslant r < d$.

问题至今未见解决.

首先，对 $p \leqslant d$ 及 $d=2, p=3,4$ 的情形，利用向量空间的性质，本文获得了

定理 1 设 $e_1, e_2, \cdots, e_p$ 为 E^d 中单位向量，相互夹角皆不超过 $\frac{\pi}{2}$，$p \leqslant d$，$m(d,p) = \left|\sum_{i=1}^{p} e_i\right|$，则有

$$m(d,p) \geqslant \sqrt{p}, \tag{2}$$

其中等号成立的充要条件是 $e_1, e_2, \cdots, e_p$ 相互夹角皆为 $\frac{\pi}{2}$.

定理 2 设 $e_1, e_2, \cdots, e_p$ 为 E^2 中单位向量，相互夹角皆不超过 $\frac{\pi}{2}$，$m(d,p) = \left|\sum_{i=1}^{p} e_i\right|$，则有

* 收稿日期：2000-04-24
作者简介：林 波(1964-)，男，江苏海安县人，硕士，副教授.

$$m(2,3) \geqslant \sqrt{5}, \tag{3}$$

$$m(2,4) \geqslant 2\sqrt{2}, \tag{4}$$

其中(3)式等号成立的充要条件是e_1, e_2相互垂直，且e_3与e_1或e_2相等；(4)式等号成立的充要条件是e_1与e_2，e_3与e_4相互垂直，且e_3, e_4分别与e_1, e_2相等.

作为本文的主要结果，对于三维欧氏空间E^3中相应问题，随着问题的复杂化，我们利用球面空间的观点将问题转化为非线性规划问题. 非线性规划理论对此问题还没有很好的解决方法[3]，本文运用不等式手法较简捷地获得了

定理 3 设$e_1, e_2, \cdots, e_p$为E^3中单位向量，相互夹角皆不超过$\frac{\pi}{2}$，$m(d,p) = \left|\sum_{i=1}^{p} e_i\right|$，则有

$$m(3,4) \geqslant \sqrt{6}, \tag{5}$$

$$m(3,5) \geqslant 3, \tag{6}$$

其中(5)式等号当e_1, e_2, e_3相互垂直，且e_4与e_1相等时成立；(6)式中等号当e_1, e_2, e_3相互垂直，且e_4, e_5分别与e_3, e_1相等时成立.

易见，定理 1，定理 2，定理 3 中$m(d,p)$的最小值可以统一表示为$[(2k+1)p - k(k+1)d]^{\frac{1}{2}}$，其中$k = \left[\frac{p}{d}\right]$，(1)式对相应的$d, p$成立，从而上述定理实际上证明了 Wolliam Kruskal 对$m(d,p)$的最小值m的猜想在$p \leqslant d$及$d = 2, p = 3,4$和$d = 3, p = 4,5$时成立，并回答了 Kelly 何时$m(d,p)$取得最小值.

2 主要结果的证明

为证明定理 3，我们需如下结果

引理[2] 在曲率为$k(>0)$的n维球面型空间，设两点距离为$\overline{e_ie_j}$，引入抽象距离$g(e_i, e_j) = \cos(\sqrt{k}\ \overline{e_ie_j})$，则对任意$m(\geqslant n+2)$个点$e_1, e_2, \cdots, e_m$总有$\| g_{ij} \| = 0$；是秩为$n+1$的齐秩空间.

定理 3 的证明 先考虑$p = 4$的情形. 若e_1, e_2, e_3, e_4共面，则$m(3,4) = m(2,4)$，这时不妨设夹角最大的两个单位向量为e_1, e_2，它们线性无关. 设$e_i = \lambda_i e_1 + \mu_i e_2$，$\lambda_i$、$\mu_i \geqslant 0$，$i = 3,4$. 由条件$|e_i| = 1$得

$$\lambda_i^2 + \mu_i^2 + 2\lambda_i\mu_i e_1 \cdot e_2 = 1 \quad (i = 3,4),$$

又$0 \leqslant e_1 \cdot e_2 < 1$，从而有

$$(\lambda_i + \mu_i)^2 = 1 + 2\lambda_i\mu_i(1 - e_1 \cdot e_2) \geqslant 1 (i = 3,4)，即$$

$$\lambda_i + \mu_i \geqslant 1 \quad (i = 3,4), \tag{7}$$

其中等号成立的充要条件是$\lambda_i\mu_i = 0 (i = 3,4)$. 因此，

$$m^2(2,4) = 4 + 2(\lambda_3 + \mu_3 + \lambda_4 + \mu_4) + 2(\lambda_3 + \lambda_4 + \mu_3 + \mu_4)e_1 \cdot e_2 + 2(e_1 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_4).$$

由(7)有$\lambda_3 + \mu_3 \geqslant 1$，$\lambda_4 + \mu_4 \geqslant 1$，从而由条件可得

$$m^2(2,4) \geqslant 8 + 4e_1 \cdot e_2 + 2(e_1 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_4) \geqslant 8, \tag{8}$$

其中等号成立的充要条件是 $\lambda_3\mu_3=\lambda_4\mu_4=0$，且 $e_1\cdot e_2=e_3\cdot e_4=0$，即 e_1 与 e_2，e_3 与 e_4 相互垂直，且 e_3、e_4 各与 e_1、e_2 相等.

下面不妨设 e_1,e_2,e_3,e_4 为不共面向量. 由于问题越来越复杂，有必要将问题转化为：单位球面 S^2 上 p 个点 $A_i(|A_i|=1,i=1,2,\cdots,p)$，两两之间的球面距离 $\widehat{A_iA_j}\leqslant\frac{\pi}{2}$，求 $m(3,p)=\left|\sum_{i=1}^{p}A_i\right|$ 的最小值.

不妨设有三点 A_1,A_2,A_3，它们的混合积 $(A_1\times A_2)\cdot A_3=V>0$. 由于 $|A_i|=1,V\leqslant 1$，记 $a=\cos\widehat{A_2A_3},b=\cos\widehat{A_3A_1},c=\cos\widehat{A_1A_2}$，则 $a,b,c\in[0,1)$，由向量代数知

$$V^2=\begin{vmatrix}A_1^2 & A_1\cdot A_2 & A_1\cdot A_3\\ A_1\cdot A_2 & A_2^2 & A_2\cdot A_3\\ A_1\cdot A_3 & A_2\cdot A_3 & A_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & c & b\\ c & 1 & a\\ b & a & 1\end{vmatrix}\in(0,1]. \tag{9}$$

又记 $x=\cos\widehat{A_1A_4},y=\cos\widehat{A_2A_4},z=\cos\widehat{A_3A_4}$，由文[2]中秩的概念及引理知，有

$$\begin{vmatrix}1 & c & b & x\\ c & 1 & a & y\\ b & a & 1 & z\\ x & y & z & 1\end{vmatrix}=0.$$

展开并整理得

$$V^2=(1-a^2)x^2+(1-b^2)y^2+(1-c^2)z^2+2(ab-c)xy+2(ac-b)xz+2(bc-a)yz. \tag{10}$$

这样，问题又可简化为：若 a、b、$c\in[0,1)$，x、y、$z\in[0,1]$，在约束条件(10)下，求

$$m^2(3,4)=4+2(a+b+c+x+y+z)$$

的最小值. 这是含 6 个变量的非线性规划问题.

注意这里的 $x+y+z\neq 0$，否则有 $x=y=z=0$，代入(10)式得 $V=0$，矛盾. 下面用不等式方法证明 $m(3,4)$ 的最小值为 $\sqrt{6}$.

不妨设 $c\geqslant b\geqslant a\geqslant 0$，则由 $a,b,c\in[0,1)$ 知 $a^2\leqslant a,b^2\leqslant b,c^2\leqslant c$，于是

$$a^2+b^2+c^2\leqslant a+b+c.$$

而 $ab\leqslant b\leqslant c,ac\leqslant a\leqslant b$，由(10)得

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=V^2+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(c-ab)xy+2(b-ac)xz+2(a-bc)yz\\&\geqslant V^2+a^2x^2+2ayz+(by-cz)^2\geqslant V^2.\end{aligned} \tag{11}$$

由 $a^2+b^2+c^2\leqslant a+b+c,x,y,z\in[0,1],V^2=1+2abc-a^2-b^2-c^2$ 以及(11)式可得

$$\begin{aligned}m^2(3,4)&=4+2(a+b+c+x+y+z)\geqslant 4+2(a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)\\&\geqslant 4+2(1+2abc)\geqslant 6.\end{aligned}$$

容易验证，当 e_1,e_2,e_3 相互垂直且 e_4 与 e_1 相等时 $m^2(3,4)=6$，从而(5)式获证.

再考虑 $p=5$ 的情形. 沿用上面的记号，再记 $u=\cos\widehat{A_1A_5},v=\cos\widehat{A_2A_5},w=\cos\widehat{A_3A_5},t=\cos\widehat{A_4A_5}$. 问题简化为求

$$m^2(3,5)=5+2(a+b+c+x+y+z+u+v+w+t)$$

的最小值，约束条件为(10)及

$$V^2=(1-a^2)u^2+(1-b^2)v^2+(1-c^2)w^2+2(ab-c)uv+2(ac-b)uw+2(bc-a)vw, \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & c & b & x & u \\ c & 1 & a & y & v \\ b & a & 1 & z & w \\ x & y & z & 1 & t \\ u & v & w & t & 1 \end{vmatrix}=0, \quad (14)$$

其中 $a,b,c,x,y,z,u,v,w,t\in[0,1]$. 这是含 10 个变量的非线性规划问题.

不难验证,取 $a=b=c=x=y=v=w=t=0,z=u=1$,是满足上述约束条件的一组可行解,这时 $m^2(3,5)=9$,记 $S=a+b+c+x+y+z+u+v+w+t$,下面证明上述可行解也是一组最优解,即 $m^2(3,5)\geqslant 9$,亦即 $S\geqslant 2$.

这里的 10 个变量地位同等,不妨设 5 点 $A_i(i=1,2,\cdots,5)$ 构成的十个球面三角形(包括退化的)中,三边长的余弦值之和为最小的一个为球面三角形 $A_1A_2A_3$,那么,$a+b+c\leqslant a+y+z$,$a+b+c\leqslant x+b+z$,$a+b+c\leqslant x+y+c$,从而 $a+b+c\leqslant x+y+z$. 同理,$a+b+c\leqslant u+v+w$. 记 $a+b+c=S_0$,$x+y+z=S_1$,$u+v+w=S_2$,则 $S_0\leqslant S_1$,$S_0\leqslant S_2$,不妨设 $S_1\leqslant S_2$. 我们分五种情形来证明 $S=S_0+S_1+S_2+t\geqslant 2$.

情形 1　若 $0\leqslant S_0\leqslant\frac{1}{2}$成立. 则一方面有 $S_0\geqslant 2S_0^2$,另一方面,注意到 $x,y,z,u,v,w,t\in[0,1]$,有 $S_1\geqslant x^2+y^2+z^2$,$S_2\geqslant u^2+v^2+w^2$,从而

$$\begin{aligned} S &\geqslant 2(a+b+c)^2+x^2+y^2+z^2+u^2+v^2+w^2+t \\ &=(a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2+c^2+u^2+v^2+w^2)+4(ab+bc+ca)+t, \end{aligned}$$

根据(11)、(13)两式易知有

$$S\geqslant(1+2abc)+(1+2abc)+4(ab+bc+ca)+t\geqslant 2$$

情形 2　若$\frac{1}{2}<S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant\frac{2}{3}$成立. 则有$(S_i-\frac{1}{2})(S_i-\frac{2}{3})\leqslant 0(i=0,1,2)$. 因此,

$$S_i\geqslant\frac{6}{7}(S_i^2+\frac{1}{3})\quad(i=0,1,2),$$

故

$$S\geqslant\frac{6}{7}(S_0^2+S_1^2+S_2^2+1)+t.$$

显然,$S_0^2\geqslant a^2+b^2+c^2$,$S_1^2\geqslant x^2+y^2+z^2$,$S_2^2\geqslant u^2+v^2+w^2$,类似于(5)式证明过程,由(11)、(13)两式可得

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 1+2abc-a^2-b^2-c^2,\ u^2+v^2+w^2\geqslant 1+2abc-a^2-b^2-c^2,$$

于是

$$\begin{aligned} S &\geqslant\frac{6}{7}(a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2+u^2+v^2+w^2+1)+t \\ &\geqslant\frac{6}{7}(1+2abc+1+2abc-a^2-b^2-c^2+1)\geqslant\frac{6}{7}[3+4abc-(a+b+c)^2] \\ &\geqslant\frac{6}{7}(3-\frac{4}{9})>2. \end{aligned}$$

情形 3　若$\frac{1}{2}<S_0\leqslant S_1\leqslant\frac{2}{3}<S_2$ 成立,则类似可得

$$S > \frac{6}{7}(S_0^2+S_1^2+\frac{2}{3})+\frac{2}{3}+t \geqslant \frac{6}{7}(a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2+\frac{2}{3})+\frac{2}{3}$$
$$\geqslant \frac{6}{7}(1+2abc+\frac{2}{3})+\frac{2}{3} > \frac{44}{21} > 2.$$

情形 4 若$\frac{1}{2} < S_0 \leqslant \frac{2}{3} < S_1 \leqslant S_2$成立，则当$S_1 > 1$时显然有$S > 2$；当$\frac{2}{3} < S_1 \leqslant 1$时，

$$(S_1-\frac{2}{3})(S_1-1) \leqslant 0,$$

从而$S_1 \geqslant \frac{3}{5}(S_1^2+\frac{2}{3})$，于是

$$S > \frac{6}{7}(S_0^2+\frac{1}{3})+\frac{3}{5}(S_1^2+\frac{2}{3})+\frac{2}{3} = \frac{9}{35}S_0^2+\frac{3}{5}(S_0^2+S_1^2)+\frac{142}{105}$$
$$> \frac{9}{140}+\frac{3}{5}(1+2abc)+\frac{142}{105} > 2.$$

情形 5 若$\frac{2}{3} < S_0 \leqslant S_1 \leqslant S_2$成立．则显然$S > 2$.

至于(6)中等号，易验证上述可行解使$m^2(3,5)=9$，且对应的单位向量e_1,e_2,e_3相互垂直，且e_4,e_5分别与e_3,e_1相等．综上，(6)式成立，获证.

3 附 录

定理 1 的证明 记向量e_i,e_j的内积为$e_i \cdot e_j (i,j=1,2,\cdots,p)$，由欧氏空间中向量内积的性质易知$m^2(d,p)=\sum_{i=1}^{p}e_i^2+2\sum_{i<j}e_i \cdot e_j$，由条件知$e_i \cdot e_j \in [0,1] (i,j=1,2,\cdots,p)$．故有$m^2(d,p) \geqslant \sum_{i=1}^{p}e_i^2=p$，即$m(d,p) \geqslant \sqrt{p}$，(1)式成立．其中等号成立的充要条件是$p$个单位向量两两相互夹角为$\frac{\pi}{2}$.

定理 2 的证明 不妨设$e_1,e_2,\cdots,e_p$中夹角最大的两个向量为e_1,e_2，它们线性无关．设$e_3=\lambda_3 e_1+\mu_3 e_2 (\lambda_3,\mu_3 \geqslant 0)$，则

$$\begin{aligned} m^2(2,3) &= [(1+\lambda_3)e_1+(1+\mu_3)e_2]^2 \\ &= 2+(\lambda_3^2+\mu_3^2+2\lambda_3\mu_3 e_1 \cdot e_2)+2(\lambda_3+\mu_3)+2(1+\lambda_3+\mu_3)e_1 \cdot e_2 \\ &= 3+2(\lambda_3+\mu_3)+2(1+\lambda_3+\mu_3)e_1 \cdot e_2, \end{aligned}$$

注意到$\lambda_3,\mu_3 \geqslant 0$，$\lambda_3,\mu_3$不全为零，$e_1 \cdot e_2 \in [0,1)$，由(7)式可知$m^2(2,3) \geqslant 5$，即

$$m(2,3) \geqslant \sqrt{5}$$

其中等号成立的充要条件是$\lambda_3\mu_3=0$且$e_1 \cdot e_2=0$，即e_1,e_2相互垂直且e_3与e_1(或e_2)相等．(3)式得证.

由定理 3 证明过程可知(4)式成立，定理 2 证毕.

最后，我们猜想，E^d中$m(d,p)$的最小值可统一表表示为

$$[(2k+1)p-k(k+1)d]^{\frac{1}{2}}, k=[\frac{p}{d}],$$

并且最小值在单位向量夹角为$\frac{\pi}{2}$时取得.

参考文献:

[1] KELLY L M. *The Geometry of Metric and Linear Spaces* [J]. Preceedings of a Conference Held at Michigan State University, East Lansing, 1974, **6**: 17—19

[2] 杨 路,张景中. 抽象距离空间的秩的概念 [J]. 中国科学技术大学学报, 1980, **10**(4): 1—14.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *The concept of rank for abstract distomce space* [J]. J. China Univ. Sci. Tech., 1980, **10**(4): 1—14. (in Chinese)

[3] 陈宝林. 最优化理论与算法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1989, 8.
CHEN Bao-lin. *The Superlative Theory and Operation* [M]. Beijing: Qinghua Univ. Publishing House, 1989, **8**. (in Chinese)

Some Notes on Kelly's Problem and Wolliam Kruskal Conjecture

LIN Bo, ZOU Quan-ru

(Dept. of Math., Yangzhou University, Jiangsu 225002, China)

Abstract: In the paper, we proved the conjecture of Wolliam Kruskal about Kelly's problem in [1] when $p \leqslant d$ and $d=2, p=3,4$ and $d=3, p=4,5$. At the same time, we obtained the minimum of $m(d,p)$ and a kind of resolvable method for non-linear programming problem.

Key words: nonlinear programming; spherical geometry; inequality.