第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

广义 Kac-Moody 代数的虚根与权*

靳一东[1]， 郝明贤[2]

(1. 华北电力大学计算科学与信息系，河北 保定 071003；
2. 保定职业技术学院，河北 保定 071051)

摘 要：本文讨论了广义 Kac-Moody 代数的虚根与不可约模 $L(\Lambda)$ 的权相互"刻划"的关系，同时定义了广义 Kac-Moody 代数的严格虚根并给出了严格虚根的一些性质. 它们推广了文献[2]和[3]中的某些结果.

关键词：广义 Kac-Moody 代数；虚根；权；严格虚根.
分类号：AMS(2000) 17B/CLC number：O152.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0155-05

1 基本概念

定义 1 设 n 阶实矩阵 A 满足条件

(C1) $a_{ii}=2$ 或 $a_{ii}\leqslant 0$；

(C2) $a_{ij}\leqslant 0$，如果 $i\neq j$；$a_{ij}\in Z$，如果 $a_{ii}=2$；

(C3) $a_{ij}=0$，当且仅当 $a_{ji}=0$，

则称相应于矩阵 A 的李代数 $g(A)$（详见[1]）为广义 Kac-Moody 代数（记为 GKM 代数）.

设 A 为满足(C1)－(C3)的 n 阶实矩阵，$(\eta,\Pi,\Pi^{\vee})$ 是 A 的一个实现，η^* 为 η 的对偶空间，其余记号均同[2]中. 对 $\Lambda\in\eta^*$，$L(\Lambda)$ 是 GKM 代数 $g(A)$ 上以 Λ 为最高权的不可约模，$P(\Lambda)$ 表示其权集，令

$$P=\{\lambda\in\eta^*\mid<\lambda,\alpha_i^{\vee}>\in Z,\forall\ \alpha_i\in\Pi^{re}\},$$
$$P_+=\{\lambda\in P\mid<\lambda,\alpha_i^{\vee}>\geqslant 0,\forall\ \alpha_i\in\Pi^{re}\},$$
$$P_+^0=\{\lambda\in P_+\mid<\lambda,\alpha_i^{\vee}>\geqslant 0,\forall\ \alpha_i\in\Pi^{im}\},$$

η^* 中带有一个相对于 Q_+ 的半序"$\leqslant$"，即对 $\lambda,\mu\in\eta^*$，$\lambda\leqslant\mu$ 是指 $\mu-\lambda\in Q_+$.

定义 2 设 $\Lambda\in P_+^0$. $\lambda\in P$ 称为关于 Λ 非退化，如果 $\lambda=\Lambda$ 或 $\lambda<\Lambda$ 且对 $\mathrm{supp}(\Lambda-\lambda)$ 的任一连通分支 S，都存在 $i\in S$ 使 $\langle\Lambda,\alpha_i^{\vee}\rangle>0$.

* 收稿日期：2000-04-10
作者简介：靳一东(1964-)，男，河北昌黎人，硕士，副教授.

2 虚根与权

设 $\Lambda \in P_+^0$,$P(\Lambda)$ 为 GKM 代数 $g(A)$ 模 $L(\Lambda)$ 的权集. 熟知,$P(\Lambda)$ 在 W 下是不变的.

引理 1 设 $\Lambda \in P_+^0$,则任一 $\lambda \in P(\Lambda)$ 都 W 共轭于唯一的 $\mu \in P_+^0 \cap P(\Lambda)$.

证明 由文献[2]中推论 10.1 可以证明:任一 $\lambda \in P(\Lambda)$ 都 W 共轭于唯一的 $\mu \in P_+ \cap P(\Lambda)$,又由 $\Lambda \in P_+^0$ 及 $\mu \leqslant \Lambda$ 可知,对任意 $\alpha_i \in \Pi^{im}$ 均有 $< \mu, \alpha_i^\vee > \geqslant \langle \Lambda, \alpha_i^\vee > \geqslant 0$,从而 $\mu \in P_+^0 \cap P(\Lambda)$.

我们在文献[5]中不假设"$g(A)$ 可对称化"的条件,同样可以证明那里的结果是正确的,即有下面的定理.

定理 1 设 $\Lambda \in P_+^0$,则

(a) 任一 $\lambda \in P(\Lambda)$ 都关于 Λ 非退化;

(b) 对任意 $\alpha_i \in \Pi^{im}$ 和 $\lambda \in P(\Lambda)$,当 $< \lambda, \alpha_i^\vee > = 0$ 时,过 λ 的 α_i 权链中只含 λ 一个元;当 $< \lambda, \alpha_i^\vee > > 0$ 时,过 λ 的 α_i 权链形如 $\cdots, \lambda - \alpha_i, \lambda, \cdots, \lambda + q\alpha_i (q \in Z_+)$;

(c) $P(\Lambda) = W\{\lambda \in P_+^0 \mid \lambda$ 关于 Λ 非退化$\}$.

证明 显然对任意 $\alpha_i \in \Pi$ 均有 $\dim L(\Lambda)_{\Lambda-\alpha_i} \leqslant 1$. 由文献[2]命题 9.4 知,当 $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ 时,必然有 $\dim L(\Lambda)_{\Lambda-\alpha_i} = 0$,即 $f_i v_\Lambda = 0$. 从而类似于文献[2]中引理 11.2 的证明可得(a)成立. 由(a)的结论,(b)和(c)的证明与文献[5]中证明完全一样.

下面的引理 2 是文献[2]中的结果.

引理 2 令 $K = \{\alpha \in Q_+ \backslash 0 \mid \alpha \in -C^\vee$ 且 $\operatorname{supp}\alpha$ 连通$\} \backslash \bigcup_{j \geqslant 2} j\Pi^{im}$,则 $K \subset \Delta_+^{im}$,进一步有

$$\Delta_+^{im} = \bigcup_{w \in W} W(K).$$

定理 2 设 $\alpha \in K$,如果 $\alpha = \alpha_i \in \Pi^{im}$ 且 $a_{ii} < 0$,那么

$$P(-\alpha) \subset -\Delta_+^{im} \cup \{-jW(\alpha_i) \mid j \geqslant 2\};$$

否则,

$$P(-\alpha) \subset -\Delta_+^{im}.$$

证明 先证定理的后半部分,由 K 的定义和虚素根的性质知:$-\alpha \in P_+^0$. 又易见

$$P(-\alpha) \subset -Q_+.$$

任取 $-\beta \in P_+^0 \cap P(-\alpha)$,则 $\beta \in Q_+$ 且 $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \leqslant 0 (\forall\ \alpha_i \in \Pi)$,即 $\beta \in -C^\vee$. a) 当 $\operatorname{Supp}\alpha$ 至少含有两个顶点时,因为 $-\beta \leqslant -\alpha$,所以 $\operatorname{supp}\beta \supseteq \operatorname{supp}\alpha$. 因而 $\operatorname{supp}\beta$ 也至少含有两个顶点. 下证 $\operatorname{supp}\beta$ 是连通的. 因为 $-\beta$ 关于 $-\alpha$ 非退化,所以对 $\operatorname{supp}(\beta - \alpha)$ 的任一连通分支 R 都存在 $i \in R$,使 $\langle -\alpha, \alpha_i^\vee \rangle \neq 0$. 因此 R 与 $\operatorname{supp}\alpha$ 相连,又由 $\operatorname{supp}\alpha \subseteq \operatorname{supp}\beta$,从而 $\operatorname{supp}\beta$ 的每个连通分支都与 $\operatorname{supp}\alpha$ 相连,又知 $\operatorname{supp}\alpha$ 是连通的,所以 $\operatorname{supp}\beta$ 也连通. 从而 $\beta \in K^{\Delta_+^{im}}$. 由引理 1 和引理 2 便有:$P(-\alpha) \subset -\Delta_+^{im}$. b) 当 $\operatorname{supp}\alpha$ 只含一个顶点时,由已知条件,此时必存在 $\alpha_i \in \Pi^{im}$ 且 $a_{ii} = 0$ 使 $\alpha = \alpha_i$. 如果 $\operatorname{supp}\beta$ 含有两个以上的顶点,则同 a) 可证:$\beta \in K \subset \Delta_+^{im}$;如果 $\operatorname{supp}\beta$ 只含一个顶点,则必有 $\beta = k\alpha_i$,但由 $\langle -\alpha, \alpha_i^\vee \rangle = \langle -\alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = -a_{ii} = 0$,由定理 1(b) 可知 $\beta = \alpha_i \in \Delta_+^{im}$;总之,不论 $\operatorname{supp}\beta$ 含有几个顶点均有 $\beta \in \Delta_+^{im}$,从而也有

$$P(-\alpha) \subseteq -\Delta_+^{im}.$$

至此定理 2 的后半部分已证完. 只要再次注意到定理 1(b) 的结论, 定理 2 的前一部分可完全类似地证明.

定义 3 $\alpha \in \Delta_+$ 称为 null 根, 如果对任意 $i \in \operatorname{supp}\alpha$ 均有 $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0$.

显然, 所有的 null 根都在 K 中, 因而都是虚根.

引理 3 设 $\alpha \in \Delta_+$ 且 α 不是 null 根, 则

$$S = \{i \in \operatorname{supp}\alpha \mid \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \geqslant 0\}$$

为若干个有限型连通图之并.

证明 若 $i \in \operatorname{supp}\alpha$ 且 $\alpha_i \in \Pi^{im}$, 则由 $\operatorname{supp}\alpha$ 的连通性及 α 不是 null 根知, 必存在 $j \in \operatorname{supp}\alpha$ 使 α_j 与 α_i 相连(可能 $j = i$), 即 $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle < 0$, 又因为 $a_{ii} \leqslant 0$, 所以

$$\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leqslant \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle < 0.$$

由此 $i \in S$, 即 S 中只能含有实素根. 设 R 为 S 的任一连通分支, 令 $\alpha = \sum k_j \alpha_j$, $\alpha_R = \sum_{i \in R} k_i \alpha_i$, 则

$$\langle \alpha_R, \alpha_i^\vee \rangle \geqslant \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \geqslant 0 (\forall\ i \in R).$$

因此 R 是有限型或仿射型图. 若 R 为仿射型, 则 $\langle \alpha_R, \alpha_i^\vee \rangle = 0 (\forall\ i \in R)$, 从而 $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0 (\forall\ i \in R)$. 由于 α 不是 null 根, 所以 R 是 $\operatorname{supp}\alpha$ 的真子图. 又 $\operatorname{supp}\alpha$ 是连通的, 故存在 $i \in R$ 及 $j \in \operatorname{supp}\alpha \backslash R$ 使 i 与 j 相连. 因此

$$0 = \langle \alpha_R, \alpha_i^\vee \rangle = \langle \alpha - \sum_{p \notin R} k_p \alpha_p, \alpha_i^\vee \rangle = - \langle \sum_{p \notin R} k_p \alpha_p, \alpha_i^\vee \rangle - \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle > 0,$$

矛盾. 所以 R 只能为有限型.

定理 3 设 $\alpha \in K$. 如果 $\beta \in K$ 不是 null 根, 且 $\alpha \leqslant \beta$, 则 $-\beta \in P(-\alpha)$.

证明 显然, $-\alpha$, $-\beta \in P_+^0$ 且 $-\beta \leqslant -\alpha$, 由定理 1(c), 只须证明 $-\beta$ 关于 $-\alpha$ 非退化. 令 $\gamma = \beta - \alpha = \sum b_i \alpha_i \in Q_+ \backslash 0$.

a) 当 α 不是 null 根时, 若 $-\beta$ 关于 $-\alpha$ 非退化不成立, 则存在 $\operatorname{supp}\gamma$ 的某个连通分支 S 使对任意 $i \in S$ 均有: $\langle -\alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0$. 设 $\alpha_S = \sum_{i \in S} b_i \alpha_i$, 则

$$\langle \alpha_S, \alpha_i^\vee \rangle = \langle \gamma, \alpha_i^\vee \rangle = \langle \beta - \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \leqslant 0 \quad (\forall\ i \in S).$$

所以 S 不是有限型. 因而由 α 不是 null 根及引理 3 知: $S \not\subseteq \operatorname{supp}\alpha$. 如果 S 不与 $\operatorname{supp}\alpha$ 相连, 因为 $\operatorname{supp}\beta$ 连通, 故存在 $i \in \operatorname{supp}\beta \backslash (S \cup \operatorname{supp}\alpha)$ 使 i 与 S 相连. 显然 $i \in \operatorname{supp}\gamma$, 这与 S 为 $\operatorname{supp}\gamma$ 的连通分支矛盾; 如果 S 与 $\operatorname{supp}\alpha$ 相连, 因为 $S \not\subseteq \operatorname{supp}\alpha$, 故存在 $j \in S \backslash \operatorname{supp}\alpha$ 使 j 与 $\operatorname{supp}\alpha$ 相连, 从而 $\langle \alpha, \alpha_j^\vee \rangle < 0$ 这与 $\langle -\alpha, \alpha_j^\vee \rangle = 0$ 矛盾. 因此必有 $-\beta$ 关于 $-\alpha$ 非退化.

b) 当 α 是 null 根时, 如果存在 $\alpha_i \in \Pi^{im}$ 使得 $\alpha = \alpha_i$(此时 $a_{ii} = 0$), 因为 β 不是 null 根且 $\alpha \leqslant \beta$, 所以 $\operatorname{supp}\beta$ 除包含 i 外还至少含有一个其它的顶点, 由 $\operatorname{supp}\beta$ 的连通性可知, i 必与 $\operatorname{supp}(\beta - \alpha) = \operatorname{supp}(\beta - \alpha_i)$ 的每个连通分支相连, 从而 $-\beta$ 关于 $-\alpha (= -\alpha_i)$ 非退化; 如果对任意 $\alpha_i \in \Pi^{im}$, 均有 $\alpha \neq \alpha_i$, 则断言: $\operatorname{supp}\alpha$ 中不能含有 i 使 $\alpha_i \in \Pi^{im}$. 不然, 即存在 $i \in \operatorname{supp}\alpha$ 且 $\alpha_i \in \Pi^{im}$, 由 $\alpha \neq \alpha_i$ 及 $\operatorname{supp}\alpha$ 的连通性必有: $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$, 这与 α 为 null 根矛盾. 因而 $\operatorname{supp}\alpha$ 只能是仿射型图. 假设此时 $-\beta$ 关于 $-\alpha$ 非退化不成立, 则存在 $\operatorname{supp}\gamma$ 的某个连通分支 S 使对任意 $i \in S$ 均有: $\langle -\alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0$, 同 a) 中可证 S 不是有限型图. 如果 $S \not\subseteq \operatorname{supp}\alpha$, 由 a) 的证明可导致矛盾; 如果 $S \subseteq \operatorname{supp}\alpha$, 由 S 的连通性有: $S = \operatorname{supp}\alpha$. 又因为 β 不是 null 根, 所以 $\operatorname{supp}\alpha \not\subseteq \operatorname{supp}\beta$.

因此存在 $j \in \mathrm{supp}\beta \backslash \mathrm{supp}\alpha$ 使 j 与 $\mathrm{supp}\alpha$ 相连. 但 $j \in \mathrm{supp}\gamma$，这与 $S = \mathrm{supp}\alpha$ 是 $\mathrm{supp}\gamma$ 的连通分支矛盾. 从而必有 $-\beta$ 关于 $-\alpha$ 非退化成立.

综合 a) 和 b) 便证明了定理 3.

定理 2 和定理 3 在某种意义上给出了虚根和权相互“刻划”的关系，作为应用我们有下面的例子.

例 设 $A = \begin{Bmatrix} M_{n-1} & \begin{matrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{matrix} \\ -c_1, \cdots, -c_{n-1}, & -b \end{Bmatrix}$ 为满足定义 1 中条件(C1)－(C3)的 n 阶实矩阵，其中 M_{n-1} 是 $n-1$ 阶有限型广义 Cartan 矩阵，则对 GKM 代数 $g(A)$ 有：

(i) 当 $b = 0$ 时，$P(-\alpha_n) = -\Delta_+^{im}$；

(ii) 当 $b > 0$ 时，$P(-\alpha_n) = -\Delta_+^{im} \cup \{jW(\alpha_n) \mid j \geqslant 2\}$.

证明 因为 $\Pi^{re} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\}$，$\Pi^{im} = \{\alpha_n\}$. 又如果 $\alpha = \sum k_i \alpha_i \in \Delta_+^{im}$，则必有 $k_n \neq 0$，从而对任意 $\beta \in K$，如果 $\beta \neq \alpha_n$，则 $\langle \beta, \alpha_n^\vee \rangle < 0$，即 β 不是 null 根，又显然 $\alpha_n \leqslant \beta$，故由定理 3 知：$-\beta \in P(-\alpha_n)$，即 $-K \subset P(-\alpha_n)$，又由引理 2 有

$$-\Delta_+^{im} \subset P(-\alpha_n),$$

再由定理 2 知结论成立.

最后给出 GKM 代数的严格虚根的定义并讨论它的一些性质. 令

$$\Delta_s = \Delta_+^{im} \backslash \{W\alpha_i \mid \alpha_i \in \Pi^{im}\}$$

定义 4 一个虚根 α 称为严格虚根，如果 $\alpha \in \Delta_s$ 或 $-\alpha \in \Delta_s$，并且对任意 $\beta \in \Delta_+^{re} \cup \{W\alpha_i \mid \alpha_i \in \Pi^{im}\}$ 均有 $\alpha + \beta$ 和 $\alpha - \beta$ 中至少有一个是根.

用 Δ^{sim} 表示 $g(A)$ 的所有严格虚根的集合，令 $\Delta_+^{sim} = \Delta^{sim} \cap Q_+$ 为正严格虚根集. 由 Δ_s 的定义知它是 W 不变的，从而 Δ_+^{sim} 是 W 不变的，令 $X = \bigcup_{w \in W} W(C)$ 为 Tits 锥，相应地有对偶 Tits 锥 $X^\vee$，注意，X 和 $X^\vee$ 都是凸的.

定理 4 (i) 若 $\alpha \in \Delta_+^{sim} \cap K$，则对任意 $\beta \in \Delta_+$ 均有 $\alpha + \beta \in \Delta_+$

(ii) 对任意 $\alpha \in \Delta_+^{sim}$ 及任意 $\beta \in \Delta_+^{im}$ 均有 $\alpha + \beta \in \Delta_+^{im}$.

证明 (i) $\beta \in \Delta_+^{re}$ 时，由 $\alpha \in \Delta_+^{sim}$ 知：$\alpha + \beta$ 和 $\alpha - \beta$ 中至少有一个为根，如果 $\alpha + \beta$ 不是根，则 $\alpha - \beta$ 必是根. 此时过 α 的 β 根链形如：

$$\alpha - p\beta, \cdots, \alpha - \beta, \alpha \quad (p \in Z_+, p \geqslant 1),$$

并且 $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = p \geqslant 1$，但由 $\alpha \in K \subset -C^\vee$ 可得：$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \leqslant 0$，矛盾. 因此必有 $\alpha + \beta \in \Delta_+$.

当 $\beta \in \Delta_+^{im}$ 时，因为 $\alpha, \beta \in -X^\vee$，而 $X^\vee$ 是凸锥，从而 $\alpha + \beta \in X^\vee$，故存在 $w \in W$ 使 $w(\alpha + \beta) \in -C^\vee$，因为 $w\alpha \in \Delta_+^{sim}$，故对任意的 $\alpha_i \in \Pi = \Pi^{re} \cup \Pi^{im}$ 均有 $w\alpha + \alpha_i$ 和 $w\alpha - \alpha_i$ 中至少有一个为根，从而 $w\alpha$ 与 $S(A)$ 的每个顶点相连，由此知

$$\mathrm{supp}w(\alpha + \beta) = \mathrm{supp}(w\alpha + w\beta)$$

是连通的，由引理 2，$w(\alpha + \beta) \in K \subset \Delta_+^{im}$，从而 $\alpha + \beta \in \Delta_+^{im}$.

(ii) 的证明由 Δ_+^{im} 及 Δ_+^{sim} 的 W 不变性和 (i) 中后半部分的证明立即可得.

参考文献：

[1] BORCHERDS R E. *Generalized Kac-Moody algebras* [J]. J. Algebra, 1988, **115**: 501—512.

[2] KAC V G. *Infinite Dimensional Lie Algebras* [M]. 3rd edition. Cambridge University Press, 1990.

[3] 张贺春. Kac-Moody 代数的虚根系 [J]. 数学学报, 1990, **33**(1): 1—6.
ZHANG He-chun. *Imaginary root systems of Kac-Moody algebras* [J]. Acta Math. Sinica, 1990, **33** (1): 1—6. (in Chinese)

[4] 张知学. 广义 Kac-Moody 代数模的某些性质 [J]. 科学通报, 1993, **38**(9): 772—774.
ZHANG Zhi-xue. *Some properties of modules over generalized Kac-Moody algebras* [J]. Chinese Science Bulletin, 1993, **38**(9): 772—774. (in Chinese)

[5] 靳一东,张知学. 广义 Kac-Moody 代数模的权链与权集 [J]. 科学通报, 1995, **40**(15): 1345—1348.
JIN Yi-dong, ZHANG Zhi-xue. *Weight string and weight set of modules over generalized Kac-Moody algebras* [J]. Chinese Science Bulletin, 1995, **40**(15): 1345—1348. (in Chinese)

Imaginary Roots and Weights for Generalized Kac-Moody Algebras

JIN Yi-dong[1], HAO Ming-xian[2]

(1. Dept. of Comp. Sci. & Info., NCEPU, Baoding 071003, China;
2. Baoding Vocational and Technical College, Hebei 071051, China)

Abstract: In this paper we discussed the relations between the imaginary roots and weights of the module $L(\Lambda)$ over a GKM algebra. We also defined the strictly imaginary roots of a GKM algebra and gave some properties about them. These results are generalizations in [2] and [3].

Key words: generalized Kac-Moody algebra; imaginary root; weight; strictly imaginary root.