第23卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 23 No. 1
2003年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2003

Fuzzy 判断矩阵的一致性修正*

许 若 宁
（广州大学，广东 广州 510091）

摘　要：本文给出了一种由分析者求解和决策者修正判断交替进行寻求一致性 Fuzzy 判断矩阵的方法，证明了按照此方法，在对 Fuzzy 判断矩阵进行有限次修正之后，可以得到一个满足给定精度要求的一致性 Fuzzy 判断矩阵.

关键词：Fuzzy 判断矩阵；一致性.
分类号：AMS(2000) 91B06,03E72/CLC number：C934
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)01-0173-04

1 引　言

在层次分析法中，对于方案的两两重要性比较判断，如果能够获得精确的比值，那么所建立的判断矩阵具有完全的一致性[1]，但是在一般的决策环境中，由决策者给出的判断只能是精确值的估测，因而判断矩阵在一般情况下是难以满足一致性条件的. 由于判断矩阵是导出方案排序权数的出发点，判断矩阵的准确程度直接地影响了排序的结果，因此对判断矩阵进行一致性检验便成了层次分析法中重要而基本的一个问题. 对于普通判断矩阵的一致性检验，已有许多学者进行了研究并得到一些很好的结果[2,3,4]，胡毓达等人的文章[3]给出了一种寻求使判断矩阵按任意精度达到任意满意一致性的方法，但是对于判断用 Fuzzy 数表示的 Fuzzy 判断矩阵的一致性检验，至今仍是一个尚待解决的问题. 最近文[5]对 Fuzzy 判断矩阵的一致性问题进行了探讨，给出了 Fuzzy 判断矩阵一致性的定义，并研究了 Fuzzy 判断矩阵的一致性与普通判断矩阵的一致性之间的关系. 在此基础上，本文进一步给出一种由分析者求解和决策者修正判断交替进行寻求一致性 Fuzzy 判断矩阵的方法，证明了按照此法，在对 Fuzzy 判断矩阵进行有限次修正之后，可以得到一个满足给定精度要求的一致性 Fuzzy 判断矩阵.

2　一致性 Fuzzy 判断矩阵

为了讨论方便，下面先给出一些有关的概念和结论.

记 $R^+=\{x|x\in R,x>0\}$，R^+ 上的全体有界 Fuzzy 数的集合记为 $F(R^+)$. 对于 $\tilde{a}\in$

* 收稿日期：2000-03-13
作者简介：许若宁(1957-)，男，教授.

$F(R^+)$,$\tilde{a}$ 的核记为 $\mathrm{Ker}\tilde{a}$,显然 $\mathrm{Ker}\tilde{a} \neq \varnothing$,且 $\mathrm{Ker}\tilde{a}$ 可表为有限闭区间.

对于 Fuzzy 数的相等关系,我们给出下面定义.

定义 1 对于 $\tilde{a},\tilde{b} \in F(R^+)$,令

$$v(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = \sup_{x \geqslant y} \min(\tilde{a}(x),\tilde{b}(y)), \tag{1}$$

若 $v(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}) = 1$,则称 $\tilde{a}$ 大于或等于 $\tilde{b}$,记作 $\tilde{a} \geqslant \tilde{b}$;若 $\tilde{a} \geqslant \tilde{b}$,且 $\tilde{b} \geqslant \tilde{a}$,则称 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 近似相等,记作 $\tilde{a} \approx \tilde{b}$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是某一决策层的 n 个方案,相对于上一层次的某一准则,决策者对方案进行两两重要性比较赋值之后便可以得到一个 Fuzzy 判断矩阵 $\tilde{A}$[6],由于对角线上的元素表示方案 A_i 与自身的重要性比较,故 Fuzzy 判断矩阵可表为:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & 1 & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\tilde{a}_{ij} \in F(R^+)$,且 $\tilde{a}_{ij} = \dfrac{1}{\tilde{a}_{ji}}(i,j = 1,\cdots,n)$. 对于 $\tilde{A}$ 的一致性,[5] 给出了下面定义.

定义 2 对于 Fuzzy 判断矩阵 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$,如果

$$\tilde{a}_{ij} \approx \frac{\tilde{a}_{ik}}{\tilde{a}_{jk}}, \quad i,j,k = 1,\cdots,n, \tag{2}$$

则称 $\tilde{A}$ 是一致性 Fuzzy 判断矩阵.

定理 1 对于 Fuzzy 判断矩阵 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$,如果 $\exists\ a_{ij} \in \mathrm{Ker}\tilde{a}_{ij}(i,j = 1,\cdots,n)$ 且:$A = [a_{ij}]$ 是一致性判断矩阵,即 $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}(i,j,k = 1,\cdots,n)$,则 $\tilde{A}$ 是一致性 Fuzzy 判断矩阵.

证明 见[5].

定理 1 为我们提供了通过判断矩阵 A 寻求一致性 Fuzzy 判断矩阵 $\tilde{A}$ 的方法.

3 算法步骤及其收敛性

首先,我们给出确定初始判断矩阵的一个结论.

定理 2 对于 Fuzzy 判断矩阵 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$,设 a_{ij}^0 为 $\mathrm{Ker}\tilde{a}_{ij}(i < j)$ 的中点,则有

$$a_{ji}^0 = \frac{1}{a_{ij}^0} \in \mathrm{Ker}\tilde{a}_{ji}$$

且 $A = [a_{ij}^0]$ 为正互反矩阵.

证明 因为 $\tilde{a}_{ij} \in F(R^+)$,故 $\mathrm{Ker}\tilde{a}_{ij} \neq \varnothing$,且 $\mathrm{Ker}\tilde{a}_{ij}$ 为有限闭区间. 记 $\mathrm{Ker}\tilde{a}_{ij} = [l_{ij},r_{ij}]$,有 $\mathrm{Ker}\tilde{a}_{ji} = [\dfrac{1}{r_{ij}},\dfrac{1}{l_{ij}}]$,由于 $a_{ij}^0 = \dfrac{l_{ij} + r_{ij}}{2}(i \leqslant j)$,取 $a_{ji}^0 = \dfrac{1}{a_{ij}^0}$,即

$$a_{ji}^0 = \frac{2}{l_{ij} + r_{ij}}.$$

因为 $2l_{ij} \leqslant l_{ij} + r_{ij} \leqslant 2r_{ij}$,从而有

$$\frac{1}{r_{ij}} \leqslant \frac{2}{l_{ij} + r_{ij}} \leqslant \frac{1}{l_{ij}},$$

即 $a_{ji}^0 \in \mathrm{Ker}\widetilde{a}_{ji}$.

对于矩阵 $A=[a_{ij}^0]$,显然有:(1) $a_{ij}^0 \geqslant 0$;(2) $a_{ii}^0=0$;(3) $a_{ij}^0=\dfrac{1}{a_{ji}^0}$,从而 A 为正互反矩阵.

下面给出寻求一致性 Fuzzy 判断矩阵的算法步骤:

(一) 对于 Fuzzy 判断矩阵 $\widetilde{A}=[\widetilde{a}_{ij}]$,计算 $\mathrm{Ker}\widetilde{a}_{ij}(i \leqslant j)$ 的中点 a_{ij}^0,进而计算 $a_{ji}^0=\dfrac{1}{a_{ij}^0}$,从而得到正互反矩阵$[a_{ij}^0]$,记 $A^0=[a_{ij}^0]$.

(二) 给定允许误差 $\varepsilon>0$,按[3]的方法计算在允许误差 ε 意义下的一致性判断矩阵,具体步骤如下:

(1) 计算 A^0 的最大特征值 λ^0,若 $\lambda^0=n$,则输出 A^0;否则进入下一步;

(2) 计算 A^0 对应于 λ^0 的特征向量 $w^0=(w_1^0,\cdots,w_n^0)$,进而计算 $\varepsilon_{ij}^0=\dfrac{w_j^0}{w_i^0}a_{ij}^0$,令 $k=0$;

(3) 根据下面的修正原则(S)对矩阵 $A^k=[a_{ij}^k]$进行修正,确定新矩阵 $A^{k+1}=[a_{ij}^{k+1}]$,其中 $a_{ij}^{k+1}=\dfrac{w_i^k}{w_j^k}\varepsilon_{ij}^{k+1}$.

(S) 记 $\varepsilon_{pq}^k=\max\{\varepsilon_{ij}^k \mid \varepsilon_{ij}^k>1\}$,

1. 取 ε_{pq}^{k+1} 满足:$1 \leqslant \varepsilon_{pq}^{k+1}<\varepsilon_{pq}^k$;

2. $\varepsilon_{qp}^{k+1}=\dfrac{1}{\varepsilon_{pq}^{k+1}}$;

3. 对于其余的 i,j,取 $\varepsilon_{ij}^{k+1}=\varepsilon_{ij}^k$.

(4) 计算 A^{k+1} 的最大特征值 λ^{k+1},若 $|\lambda^{k+1}-n|<\varepsilon$,则输出 A^{k+1};否则令 $k:k+1$,转入第(三)步.

(三) 令 $A=[a_{ij}]:=A^{k+1}$.

(四) 计算 $t_l=\min\{\widetilde{a}_{ij}(a_{ij}),i,j=1,\cdots,n\}$,若 $t_l=1$,则输出 $\widetilde{A}=[\widetilde{a}_{ij}]$;否则进入下一步.

(五) 记 $\widetilde{a}_{i_lj_l}(a_{i_lj_l})=t_l$,修正判断 $\widetilde{a}_{i_{l+1}j_{l+1}}$ 得 $\widetilde{a}_{i_{l+1}j_l}$,使 $\widetilde{a}_{i_lj_l} \in \mathrm{Ker}\widetilde{a}_{i_{l+1}j_{l+1}}$;令 $l:l+1$,转入第(四)步.

对于上述算法的第(二)步,[3]证明了:$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda^k=n$,即算法第(二)步是收敛的.对于算法第(四)步、第(五)步的收敛性,我们有下面结论.

定理 3 设$\{t_l\}$是上述方法得到的序列,则 t_l 是严格单调上升的且存在 $l' \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$,使 $t_{l'}=1$.

定理 4 如果对于给定精度 $\varepsilon>0$ 有:$\lambda_{\max}-n<\varepsilon$(其中 $\lambda_{\max}$ 为 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的最大特征根),则对 $\widetilde{A}$ 进行有限次修正之后,可以得到一个一致性 Fuzzy 判断矩阵.

参考文献:

[1] SAATY T L. *The Analytic Hierarchy Process* [M]. McGraw-Hill, New York, 1980.

[2] 王莲芬,许树柏. 层次分析法引论 [M]. 北京:中国人民大学出版社, 1989.

WANG Lian-fen, XU Shu-bai. *Introduction to Analytical Hierarchy Process* [M]. Beijing: Press of Renmin University of China, 1989. (in Chinese)

[3] 胡毓达,陆晋奎. 关于判断矩阵的一致性问题 [J]. 数学研究与评论, 1992, **12**(1): 112-116.
HU Yu-da, LU Jin-kui. *On uniformity problem of judgment matrix* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1992, **12**(1): 112-116. (in Chinese)
[4] 李学全,李松仁,韩旭里. AHP 理论与方法研究:一致性检验与权重计算 [J]. 系统工程学报, 1997, **12**(2): 111-117.
LI Xue-quan, LI Song-ren, HAN Xu-li. *Study of AHP theory and method: test of consistency and calculation of weight vector* [J]. Journal of Systems Engineering, 1997, **12**(2): 111-117. (in Chinese)
[5] 许若宁,刘　克. 关于 Fuzzy 判断矩阵一致性的讨论 [J]. 系统科学与数学, 2000, **20**(1): 58-64.
XU Ruo-ning, LIU Ke. *A note on consistency of fuzzy judgment matrix* [J]. J. Sys. Sci. Math. Scis., 2000, **20**(1): 58-64. (in Chinese)
[6] XU Ruo-ning, ZHAI Xiao-yan. *Extensions of the analytic hierarchy process in fuzzy environment* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, **52**(3): 251-257.

Consistent Correction for Fuzzy Judgment Matrix

XU Ruo-ning
(Guangzhou University, Guangdong 510091, China)

Abstract: In this paper, we give a method for searching consistent fuzzy judgment matrix according to the procedure that analyst's solving the model alternates with decision maker correcting the judgment, and prove that a consistent fuzzy judgment matrix with given precision can be gotten after limited correction.

Key words: Fuzzy judgment matrix; consistency.