一类 Banach 空间中的分析性质及反例*

杨泽恒， 熊 明
(大理学院荷花校区数学系，云南 大理 671000)

摘 要：本文对具有 Schauder 基的无穷维 Banach 空间上的映射定义偏导数，并讨论 f 的可微性与偏导数存在并连续的关系；同时，本文还讨论象所在空间为具有 Schauder 基的空间时，映射 f 与坐标映射 f_i 在可微性、连续性方面的关系.

关键词：Banach 空间；Schauder 基；连续；可微；偏导数；坐标泛函.
分类号：AMS(2000) 46T20,58C20/CLC number：O177.91
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0185-06

1 引言及预备

定义 1[1] 设 E 为一拓扑线性空间，若点列 $\{e_n\}\subset E$ 满足：$\forall\ x\in E$，x 可唯一表示为

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n,$$

其中 $\{x_n\}$ 为一列数，级数在 E 的拓扑意义下收敛，且泛函

$$x_n(x):E\to K,x\to x_n,(x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n)$$

在 E 上连续(K 为相应于 E 的数域)，则称 $\{e_n\}$ 为 E 的 Schauder 基. 具有 Schauder 基的无穷维 Banach 空间在本文中统称为 S 空间.

注 1 具有基的 Banach 空间的每个基都是 Schauder 基，因而具有基的无穷维 Banach 空间都是 S 空间，例如 $c_0,l_p(1\leqslant p<\infty)$ 都是 S 空间([1]).

注 2 Schauder 基是线性无关的[1]，且 S 空间中，可要求 Schauder 基向量都是单位向量. 以下涉及的 Schander 基都是由单位向量构成.

定义 2[2] 设 E,F 为 Banach 空间，$G\subset E$ 为开集 $f:G\to F$，$x\in G$，若 $\exists\ l_x\in L(E,F)$(E 到 F 的连续线性算子构成的空间)，使 $\forall\ y\in G$ 有

$$f(y)-f(x)=l_x(y-x)+R(x,y),$$

其中 $\lim\limits_{\|x-y\|\to 0}\dfrac{\|R(x,y)\|}{\|y-x\|}=0$，则称 f 在 x(Frechet) 可微，l_x 称为 f 在 x 的微分，记为 $Df(x)=l_x$.

* 收稿日期：2000-06-02
作者简介：杨泽恒(1960-)，男，副教授.

引理 1 若 f 在 x 可微，则 $\forall\ y \in E, [Df(x)](y) = \lim_{a\to 0}\dfrac{f(x+ay)-f(x)}{a}$.

证明 由定义 2，$\dfrac{1}{a}[f(x+ay)-f(x)] = [Df(x)](y) + \dfrac{1}{a}R(x,x+ay)$ 且

$$\lim_{a\to 0}\frac{\| R(x,x+ay)\|}{|a|} = \lim_{a\to 0}\frac{\| y\| \cdot \| R(x,x+ay)\|}{\| ay\|} = 0.$$

当 E,F 为有限维空间时，例如 E 为 n 维空间，$e_1,\cdots,e_n$ 为 E 的基，F 为 m 维空间，$\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_m$ 为 F 的基时，有偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{a\to 0}\dfrac{1}{a}[f(x+ae_i]-f(x)] = [Df(x)](e_i)$ 及坐标函数 $f_j(x)(f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\bar{e}_j)$，它们与 f 的可微性之间有一些较好性质.

自然问：S 空间是否也有类似的性质，本文讨论这一问题，给出相应的性质及反例.

定义 3 设 E 为 S 空间，$\{e_n\}$ 为 E 的 Schauder 基，$G\subset E$ 为开集，$f:G\to F$(F 为 Banach 空间)，$x\in G$，若 $\lim_{a\to 0}\dfrac{f(x+ae_i)-f(x)}{a}$ 存在，则称此极限为 f 关于 x_i 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$；若在 G 内每一点 x 关于 x_i 有偏导数，则有映射 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x): G\to F, x\to\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

定义 4 设 E 为 Banach 空间，F 为具有 Schauder 基 $\{\bar{e}_n\}$ 的 S 空间，$G\subset E$ 为开集，$f:G\to F$，对每一个自然数 i，泛函 $f_i: G\to R, x\to f_i(x)(f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\bar{e}_i)$ 称为 f 的第 i 个坐标泛函.

2 讨　论

问题 1 定义 4 中映射 f 连续与每一个 f_i 连续的关系如何?

命题 1 在定义 4 的假设下，若 $f:G\to F$ 连续，则 $\forall$ 自然数 i，$f_i: G\to R$ 也连续.

证明 记 $\bar{i}: F\to R, x\to x_i, x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\bar{e}_i$，则 $f_i(x) = (\bar{i} o f)(x)$，因 f 在 G 上连续，$\bar{i}$ 在 F 上连续，故 f_i 在 G 上连续，$i = 1,2,\cdots$.

反例 1 每一个 f_i 连续，但 f 不连续的例子.

设 $F = l^2, f: R\to F, f_n(t) = \dfrac{\sqrt{|t|}}{\sqrt{(1+n|t|)[1+(n+1)|t|]}}, f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\bar{e}_n, \bar{e}_n = (0,\cdots,0,1,0,\cdots)$(第 n 个坐标为 1).

显然每一个 $f_n(t)$ 在 $t = 0$ 连续. 但

$$\| f(t)-f(0)\| = [\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t)]^{\frac{1}{2}} = [\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1+|t|}-\frac{1}{1+(n+1)|t|})]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\frac{1}{1+|t|})^{\frac{1}{2}} \to 1,\quad t\to 0$$

时，f 在 $t = 0$ 不连续.

问题 2 定义 4 中映射 f 可微与每一个 f_i 可微的关系如何?

命题 2 在定义 4 的假设下，若 $f:G\to F$ 在 $x\in G$ 可微，则 $\forall$ 自然数 i，$f_i: G\to F$ 在 x 可

微.

证明 由已知条件

$$\lim_{\|x-y\|\to 0}\frac{\|f(y)-f(x)-[Df(x)](y-x)\|}{\|y-x\|}=0, \tag{1}$$

记 $l_i(x)(h)=\bar{i}([Df(x)]h)$，则 $l_i(x)\in L(E,R)$，

$$\frac{f_i(y)-f_i(x)-l_i(x)(y-x)}{\|y-x\|}=\bar{i}\left[\frac{f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)}{\|y-x\|}\right],$$

而 $\dfrac{[f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)]}{\|y-x\|}\to 0\in F(\|y-x\|\to 0)$ (由(1)式)，$\bar{i}:F\to R$ 连续，故

$$\lim_{\|x-y\|\to 0}\frac{f_i(y)-f_i(x)-l_i(x)(y-x)}{\|y-x\|}=0,$$

即 f_i 在 x 也可微，且

$$Df_i(x)=l_i(x),Df(x)(h)=\sum_{i=1}^{\infty}\bar{i}([Df(x)]h)\bar{e}_i=\sum_{i=1}^{\infty}l_i(x)(h)\bar{e}_i.$$

反例 2 每一个 f_i 可微，但 f 不可微的例子.

设 $F=l^2$，

$$f:R\to F,f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\bar{e}_n,\bar{e}_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)(\text{第 } n \text{ 个坐标为 } 1),$$

其中 $f_n(t)=\dfrac{t}{\sqrt{(1+n|t|)[1+(n+1)|t|]}},n=1,2,\cdots$. 因

$$\frac{[f_i(t)-f_i(0)]}{t-0}=\frac{1}{\sqrt{(1+i|t|)[1+(i+1)|t|]}}\to 1,(t\to 0);$$

故 $f_i(t)$ 在 $t=0$ 可微，$i=1,2,\cdots,n,\cdots$. 考虑

$$\left\|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right\|=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|t|}\left(\frac{1}{1+|t|}-\frac{1}{1+(1+n)|t|}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{|t|(1+|t|)}\right]^{\frac{1}{2}}\to+\infty\quad(t\to 0),$$

当 $\dfrac{[f(t)-f(0)]}{t-0}$ 在 $t\to 0$ 时不趋于 F 中任何点 a，故 f 在 $t=0$ 不可微.

问题 3 定义 3 中映射 f 连续可微与 f 的偏导存在且连续的关系如何?

反例 3 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 都存在且连续但 f 不可微(甚至 f 不连续)的例子.

设 E 为 S 空间，$\{e_n\}$ 为 E 的 Schauder 基;参考[1]P_{45} 中方法可定义一个 E 上不连续的线性泛函如下:令 M 为由 $\{e_n\}$ 张成的线性子空间，取 $\varepsilon_n>0$，使 $\|\varepsilon_n e_n\|\leqslant\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots$，在 M 上定义泛函 f 如下:$f(e_n)=\dfrac{1}{\varepsilon_n},n=1,2,\cdots,\forall\ x=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k e_k\in M,f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k f(e_k)=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\alpha_k}{\varepsilon_k}$.

显然，f 为 M 上的一个线性泛函. 设 H 为 E 的一个 Hamel 基，且 $H\supset\{e_n\}$，作 E 上泛函 g: $g(e_n)=f(e_n),n=,1,2,\cdots$;当 $x\in H\backslash\{e_n\}$ 时，$g(x)=0$;$\forall\ x=\sum\limits_{k=1}^{s}\beta_k\bar{e}_k\in E,\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_s\in H$，令 $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{s}\beta_k g(\bar{e}_k)$. 显然 g 是 E 上的线性泛函. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varepsilon_n e_n\|=0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}g(\varepsilon_n e_n)=1$，故 g 不

连续，因而 g 不可微.

但 $\forall\ i,\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x)=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{[g(x+ae_i)-g(x)]}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{ag(e_i)}{a}=g(e_i)$ 存在且连续.

命题 3 在定义 3 中假设下，若 $f:G\to F$ 在 G 内连续可微，则 $\forall$ 自然数 $i,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 在 G 内存在且连续，且 $[Df(x)](h)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i$.

证明 由引理 1，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)=[Df(x)](e_i)$ 存在. 又

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right\|&=\|[Df(x)-Df(y)](e_i)\|\\&\leqslant\|[Df(x)-Df(y)]\|\cdot\|(e_i)\|.\end{aligned}\tag{2}$$

因 $Df(x)$ 关于 x 在 G 内连续，故 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 在 G 内连续. $\forall\ h=\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_ie_i\in E,\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}h_ie_i=0\in E$，故

$$\lim_{n\to\infty}[Df(x)](\sum_{i=n+1}^{\infty}h_ie_i)=0\in F,$$

于是由

$$[Df(x)](h)=[Df(x)](\sum_{i=1}^{n}h_ie_i+\sum_{i=n+1}^{\infty}h_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)+[Df(x)](\sum_{i=n+1}^{\infty}h_ie_i),$$

知 $[Df(x)](h)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

注 3 命题 3 中 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 的连续性关于 i 是一致的，即对 $x\in G,\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ y\in G\cap S(x,\delta),\forall\ i$ 有

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right\|\leqslant\varepsilon(\text{由(2)式及 }Df\text{ 的连续性}),$$

其中 $S(x,\delta)=\{y\in E:\|y-x\|\leqslant\delta\}$.

注 4 由命题 3 及反例 3 知如下的条件 1)，2) 都仅为 $f:G\to F$ 在 G 内连续可微的必要条件：

1) f 的偏导在 G 内都存在且关于 i 一致连续；

2) f 在 G 内连续.

但当 $E=l$ 时，1)，2) 同时成立为 f 在 G 内连续可微的充分必要条件.

引理 2[2] 设 E 为 Banach 空间，$D=B(x_0,\gamma)\subset E,f:D\to R$ 在 D 内可微，则 $\forall\ x,x_1\in D$，有中值公式

$$f(x)-f(x_1)=Df(\bar{x})(x-x_1),\bar{x}=x_1+\tau(x-x_1),0<\tau<1,$$

其中 $B(x_0,\gamma)=\{x\in E:\|x-x_0\|<\gamma\}$.

引理 3[4] 在 Banach 空间 F 中，绝对收敛级数是收敛的，并且 $\|\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n\|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|x_n\|$.

命题 4 设 $E=l,G\subset E$ 为开集，若 $f:G\to F$ 在 G 内满足注 4 中条件 1)，2)，则 f 在 G 内连续可微且 $Df(x)(h)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i,h=\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_i$.

证明 任取定 $x \in G, \forall \varepsilon > 0$，由 1)，$\exists \gamma > 0$，使球 $B(x;\gamma) = \{y \in E: \| y - x \| < \gamma\} \subset G$ 且 $\forall y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i \in B(x,\gamma)$，$\forall$ 自然数 i，有

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right\| < \varepsilon, \tag{3}$$

记 $x^0 = x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, x^1 = y_1 e_1 + \sum_{i=2}^{\infty} x_i e_i, \cdots, x^n = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i e_i, \cdots, \forall n$,

$$\| x^n - x \| = \| (y_1 - x_1)e_1 + \cdots + (y_n - x_n)e_n \| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |y_i - x_i| = \| x - y \| < \gamma,$$

于是由引理 2，

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \lim_{n\to\infty}[f(x^n) - f(x)] = \sum_{i=1}^{\infty}[f(x^i) - f(x^{i-1})] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{y}_i)(y_i - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{y}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)(y_i - x_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i) + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{y}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)(y_i - x_i), \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\bar{y}_i = x^{i-1} + \tau_i(x^i - x^{i-1})$，而由(3)

$$\| R(x,y) \| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{y}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)(y_i - x_i) \right\| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} |y_i - x_i| = \varepsilon \| y - x \|,$$

因而(4)中第二个级数绝对收敛，(4)式成立，故 f 在 G 内可微且

$$Df(x)(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i, h = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \in E.$$

因

$$\begin{aligned} \| Df(y) - Df(x) \| &= \sup_{\|h\|=1} \| [Df(y) - Df(x)]h \| \\ &= \sup_{\|h\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]h_i \right\| \\ &\leqslant \sup_{\|h\|=1} \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| |h_i| \\ &\leqslant \sup_{\|h\|=1} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon |h_i| = \varepsilon (\text{由(3)及引理 3}). \end{aligned}$$

故 f 在 G 内连续可微.

参考文献：

[1] 汪 林. 泛函分析中的反例 [M]. 北京：高等教育出版社，1994.
WANG Lin. *Counter Examples in Functional Analysis* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1994. (in Chinese)

[2] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1985.
GUO Da-jun. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Jinan: Shandong Sci. Tech. Press, 1985. (in Chinese)

[3] GOFFMAN C. 多元微积分 [M]. 史济怀,等译. 北京:人民教育出版社, 1979.
GOFFMAN C. *Multivariable Calculus* [M]. Beijing: Translated by Shi Ji-uuai. et al., People's Education Press, 1979. (in Chinese)

[4] J.迪厄多内. 现代分析基础(第一卷) [M]. 郭瑞芝,等译. 北京:科学出版社, 1982.
DIEUDONNE J. *Eléments d'analyse* [M]. Beijing: Translated by Guo Rui-zhi. et al., Science Press, 1982. (in Chinese)

Analysis Properties and Examples for a Class of Banach Space

YANG Ze-heng, XIONG Ming

(Dept. of Math., Dali University, Yunnan 671000, China)

Abstract: We define partial derivative for a map f on Banach space with schauder base first, then discuss the relationship between differentiable property of f and existence and continuous of partial derivative of f. We also discuss the relationship between f and its coordinate functions f_i about differential and continuous properties when the image space is a Banach space with Schauder base.

Key words: Banach space; Schauder base; continuous; differentiable; partial derivative.