第23卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 23 No. 2
2003年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2003

R_1^3 中混合型曲面保主曲率等距变形*

王小平[1]，　周儒荣[1]，　叶正麟[2]

(1. 南京航空航天大学 CAD/CAM 工程研究中心，江苏 南京 210016；
2. 西北工业大学数学与信息科学系，陕西 西安 710072)

摘　要：本文研究了 Minkowski 空间 R_1^3 曲面的等距变形问题. 建立了 R_1^3 中曲面的共形、等距等概念. 推广了 O. Bonnet 和 S. S. Chern 关于欧氏空间的结论. 对 R_1^3 出现的新情况 —— 曲面的中曲率梯度类光作了一定探讨，得出的主要结果为：非平坦的、允许保主曲率等距变形的曲面一定不是 W- 曲面.

关键词：等距变形；中曲率；W- 曲面.

分类号：AMS(2000) 53C50, 53A10/CLC number: O186.16

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2003)02-0287-07

1 引　言

所谓保主曲率等距变形问题，即何种曲面允许被变为保主曲率的、非平凡、单参数的等距变形曲面簇？允许如此变形曲面簇的曲面有何特点？此类问题的研究始于 1867 年，由 Bonnet 开始[1]. 其结论是：常中曲率曲面可以进行中曲率不变的等距变形，且形变中主方向旋转固定角. 继许多数学家之后，一个较权威的结论是由 E. Cartan 利用活动标架法给出的[2]. 在此基础上数学家 S. S. Chern 对非常中曲率曲面进行了研究，结论是该曲面为 W-曲面(Weingarten 曲面)[3]. 继而 Chen Xiu-xiong 和 Peng Chia-kuei 又证明了这类 W-曲面的中曲率满足阶为 3 的常微分方程[4]，从而使 A. G. Colaries 和 K. Kenmotsu 的结论[5]成为其推论.

但是，上述研究都是在欧氏空间中进行的. 对于 Minkowski 空间 R_1^3 中的曲面，特别是混合型曲面(法向量类空)结论又将如何呢？本文将 Bonnet，S. S. Chern 的结论推广到 R_1^3 中的混合型曲面，并对出现的新情况——中曲率梯度类光，做了研究，得出一些有意义的结果.

2 基本公式

设曲面 M 是定向的，充分光滑的，无脐点的混合型曲面，则 M 上存在良定的标准正交标架场 (e_1, e_2, e_3, x)，$x \in M$，e_1, e_2, e_3 是单位正交向量场. e_3 为单位法向量，e_1, e_2 沿主方向，且 $\langle e_1,$

* 收稿日期：2000-07-18
作者简介：王小平(1966-)，男，博士.

$e_1\rangle=-1$[6]. 于是有

$$\begin{cases} dx = -\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2,\ de_1 = \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3 \\ de_2 = -\omega_{21} e_1 + \omega_{23} e_3,\ de_3 = -\omega_{31} e_1 + \omega_{12} e_2,\ \omega_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

曲面的度量形式为 $ds^2=-\omega_1^2+\omega_2^2$. 曲面 M 作为 R_1^3 中子流形，其特征为 $\omega_3=0$. 在 R_1^3 中对其外微分，再限制到 M 上得

$$-\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0,\quad \text{其中 } \omega_1, \omega_2 \text{ 为 1- 形式.}$$

如上选择的标架允许我们设

$$\omega_{12} = h\omega_1 + k\omega_2, \omega_{13} = -a\omega_1, \omega_{23} = c\omega_2,\ c > -a. \tag{2}$$

对(1)求外微分得到 M 的结构方程：

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}, \\ d\omega_{21} = \omega_{32} \wedge \omega_{32} = ac\omega_1 \wedge \omega_2, \\ d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, d\omega_{23} = -\omega_{21} \wedge \omega_{13}. \end{cases} \tag{3}$$

方程(3)中的后两式分别为高斯方程及柯达奇方程.

曲面的高斯曲率和中曲率分别为

$$K = ac, H = \frac{1}{2}(c-a). \tag{4}$$

令 $L=a+c$. 由(2)及柯达奇方程得：

$$(da-(c+a)h\omega_2) \wedge \omega_1 = 0,\ (dc-(c+a)k\omega_1) \wedge \omega_2 = 0. \tag{5}$$

再引入函数 u, v 使

$$2dH = (a+c)(u\omega_1 + v\omega_2). \tag{6}$$

由(5)得：

$$d\lg L = (-u+2k)\omega_1 + (v+2h)\omega_2. \tag{7}$$

由(6)得：

$$4(\nabla H)^2 = (c+a)^2(-u^2+v^2) = (H^2+K)(-u^2+v^2). \tag{8}$$

为以后证明我们引入 $\theta_1, \theta_2; \alpha_1, \alpha_2$ 等 1-形式：

$$\theta_1 = u\omega_1 + v\omega_2,\quad \theta_2 = v\omega_1 + u\omega_2; \tag{9}$$

$$\alpha_1 = -u\omega_1 + v\omega_2,\quad \alpha_2 = v\omega_1 - u\omega_2. \tag{10}$$

若 ∇H 非类光，则

$$d\tilde{s}^2 = -\theta_1^2 + \theta_2^2 = -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = -(\nabla H)^2(H^2+K)^{-1}ds^2. \tag{11}$$

3 一些推广的概念

定义 1 $ds^2=-\omega_1^2+\omega_2^2$ 为曲面 M 的度量，而 $d\tilde{s}^2=-\tilde{\omega}_1^2=\tilde{\omega}_2^2$ 为曲面 $\tilde{M}$ 的度量. 若在一对应下有 $d\tilde{s}^2=ds^2$，则称曲面 M 与 $\tilde{M}$ 等距.

定义 2 若 $ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2$ 为曲面 M 的度量，函数 $A\neq0$ 使 $d\tilde{s}^2=A(-\omega_1^2+\omega_2^2)=Ads^2$，则称 $d\tilde{s}^2$ 为曲面 M 的共形于 ds^2 的度量.

定义 3 ω_1, ω_2 为独立的 1-形式，若 $*\omega_1=\omega_2$，$*\omega_2=\omega_1$，则称算子“$*$”为准星算子.

定义 4 d 为外微分算子，$*$ 为准星算子，f 为函数，ω_1,ω_2 独立的 1-形式，如果 $\mathrm{d}*\mathrm{d}f=g\omega_1\wedge\omega_2$，则称 g 为 f 的准 Laplace，记为 $\Delta f=g$.

定义 5 若 $\Delta f=0$，则称 f 为准调和函数.

准星算子的性质：(1) $*^2=1$，(2)任意 $\omega=x\omega_1+y\omega_2$，则 $\omega\wedge*\omega_1=-*\omega\wedge\omega_2$. 进而有

$$*\alpha_1=\alpha_2,\ *\alpha_2=\alpha_1,\ *\theta_1=\theta_2,\ *\theta_2=\theta_1.$$

由(6)，(7)得

$$2\mathrm{d}H=d(c-a)=(c+a)\theta_1,\ \mathrm{dlg}L=\alpha_1+2*\omega_{12}, \tag{12}$$

4 可积条件

本节我们给出曲面允许非平凡(刚体运动被认为是平凡的)，单参数，保主曲率的等距变形所满足的可积条件.

设 $\tilde{M}$ 为 M 的主曲率相同的等距曲面，则 $\tilde{a}=a,\tilde{c}=c$，

$$\widetilde{\omega}_1=\mathrm{ch}\tau\omega_1+\mathrm{sh}\tau\omega_2,\quad \widetilde{\omega}_2=\mathrm{ch}\tau\omega_1+\mathrm{ch}\tau\omega_2. \tag{13}$$

外微分(13)仿[3]得

$$\widetilde{\omega}_{12}=\mathrm{d}\tau+\omega_{12}. \tag{14}$$

由(12)及(14)得

$$-\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_2-\tilde{\alpha}_1). \tag{15}$$

由(12)及(13)有 $\tilde{\alpha}_2=\mathrm{sh}2\tau\alpha_1+\mathrm{ch}2\tau\alpha_2$，代入(15)并令 $t=c\mathrm{th}\tau$ 得：$\mathrm{d}t=t\alpha_1+\alpha_2$，此为等距变形主方向旋转角满足的微分方程，类似于[3]其可积条件为

$$\mathrm{d}\alpha_1=0,\quad \mathrm{d}\alpha_2=\alpha_1\wedge\alpha_2. \tag{16}$$

特别情形，当 ∇H 类光时，令 $\alpha=\alpha_1=-\alpha_2,\theta=\theta_1=\theta_2$. 可积条件为

$$\mathrm{d}\alpha=0. \tag{17}$$

此时，

$$2\mathrm{d}H=d(c-a)=(c+a)\theta,\ \mathrm{dlg}L=\alpha+2*\omega_{12}. \tag{18}$$

5 几个引理

给出线性无关的 1-形式，由结构方程及[3]知它们唯一确定了 ω_{12}.

引理 1 ω_1,ω_2 为度量 $\mathrm{d}s^2=-\omega_1^2+\omega_2^2$ 的正交余标架，经过等距变换(13)后变为 $\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2$，则相应的联络形式满足 $\widetilde{\omega}_{12}=\omega_{12}+\mathrm{d}\tau$，其中 τ 为主方向间夹角.

证明 见(14)的推导.

现在我们考虑共形变换 $\mathrm{d}\tilde{s}^2=A^2\mathrm{d}s^2$(其中 $A>0$)下联络形式的关系. 设

$$\widetilde{\omega}_1=A\omega_1,\quad \widetilde{\omega}_2=A\omega_2. \tag{19}$$

引理 2 余标架经共形变换(19)时，相应的联络形式间满足 $\widetilde{\omega}_{12}=\omega_{12}-*\mathrm{dlg}A$.

证明 对(19)外微分，再利用(19)并仿[3]易得.

引理 3 对混合型曲面,度量形式满足 $d\tilde{s}^2=-ds^2$,则相应的高斯曲率反号.

证明 仿[3]相应的联络形式满足 $\tilde{\omega}_{12}=\omega_{12}$,故有 $\tilde{K}\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_2=K\omega_1\wedge\omega_2$,即 $\tilde{K}=-K$.

引理 4 M 上函数 f 的梯度类光,则其一定为准调和函数,即 $\Delta f=0$.

引理 5 混合型曲面经过余标架的共形变换(19),其相应的高斯曲率满足

$$\tilde{K}A^2=K-\Delta \lg A,$$

其中 Δ 为准 Laplace 算子.

证明 外微分 $\tilde{\omega}_{12}=\omega_{12}-*\,d\lg A$,将(19)代入并比较系数即得.

6 本文中的主要结论

定理 1 若曲面的中曲率为常数,则其允许保主曲率的等距变形,且形变主方向旋转固定角.

证明 类似于[3].

定理 2 若中曲率梯度类光的 W-曲面允许保主曲率等距变形,则 $\nabla a,\nabla c$ 类光,且 $K=0$.

证明 由(18),$d\lg L=\alpha+2*\omega_{12}$. 又 ∇H 类光,则

$$*\alpha=-\alpha, \tag{20}$$

$$d*d\lg L=d(L^{-1}*dL)=-L^{-2}dL\wedge *dL+L^{-1}d*dL. \tag{21}$$

因为 M 为 W-曲面,故 $dc=m da$. 又由 ∇H 类光而且 $2\nabla H=(m-1)\nabla a$,得 ∇a 类光,故 ∇c 类光. 但 $\nabla L=(m+1)\nabla a$,故 ∇L 类光,则 $*dL=\pm dL$ 且由引理 4,$\Delta L=0$,将有关各式代入(21)得

$$d*d\lg L=0. \tag{22}$$

对(18)两边作用"$d*$",并利用(20)与(22)及可积条件(17)得 $K=0$. □

定理 3 若曲面 M 的中曲率梯度类光,且高斯曲率恒为零,则其允许保主曲率等距变形.

证明 因 $K=0$,所以 $2(c+a)d(c+a)=2(c-a)d(c-a)$,即 $dL=(c-a)(c+a)^{-1}dH$,由此得 $\nabla L=HL^{-1}\nabla H$. 因为 ∇H 类光,故 ∇L 类光. 仿定理 2 中的证明可得:$d*d\lg L=0$. 对(18)两边作用"$*d$"并利用(20)与(22)得:$d*d\lg L=-d\alpha+K\omega_1\wedge\omega_2=0$. 又 $K=0$,故 $d\alpha=0$. 由可积条件(17)知,曲面允许保主曲率等距变形. □

由定理 2 可得结论:

推论 1 中曲率梯度类光的非平坦曲面允许保主曲率等距变形,则它一定不是 W-曲面.

推论 2 非平坦的允许保主曲率等距变形的 W-曲面,其中曲率梯度一定类光.

定理 4 若曲面 M 的中曲率梯度非类光,且允许保主曲率等距变形,则度量

$$d\tilde{s}^2=\mp(\nabla H)^2(H^2+K)^{-1}ds$$

的高斯曲率为 ∓1(∇H 类时取负号,反之取正号).

证明 ∇H 类空时,α_2 的对偶向量场类时,由 $-\alpha_2^2+\alpha_1^2=(\nabla H)^2(H^2+K)^{-1}(-\omega_1^2+\omega_2^2)$ 及(16)得 $\alpha_{12}=\alpha_2$,即 $\alpha_{21}=-\alpha_2$. 再由 $d\alpha_{21}=\alpha_2\wedge\alpha_1$,得 $K=1$. 同理得 ∇H 类空时的结论.

另外,由定理 4 证明中的 $\alpha_{12}=\pm\alpha_2$ 可知:

1) 曲线 $\alpha_2=0$ 为测地线.

2) 曲线 $\alpha_1=0$ 的测地曲率为 ± 1(∇H 类时取负号,反之取正号).

定理 5 若曲面 M 的中曲率梯度非类光,且其允许保主曲率等距变形,则

1) 当 ∇H 类空时,曲面 M 为 W-曲面;

2) 当 ∇H 类时,且 $-(\nabla H)^2(H^2+K)^{-1}\neq H^2$ 时,曲面 M 为 W-曲面.

证明 当 ∇H 类空时,我们分步证明.

1) 先给出一些基本公式.

设 $\omega_{12},\theta_{12},\alpha_{12}$分别是余标架 $\omega_1,\omega_2;\theta_1,\theta_2;\alpha_1,\alpha_2$ 的联络形式.公式(9)可写为

$$\theta_1 = A(\mathrm{sh}\Psi\omega_1+\mathrm{ch}\Psi\omega_2),\quad \theta_2 = A(\mathrm{ch}\Psi\omega_1+\mathrm{sh}\Psi\omega_2), \tag{23}$$

其中 $\mathrm{ch}\Psi=v(-u^2+v^2)^{-(1/2)}$,$\mathrm{sh}\Psi=u(-u^2+v^2)^{-(1/2)}$,$A=(-u^2+v^2)^{-(1/2)}$.同理有

$$\alpha_1 = A(-\mathrm{sh}\Psi\omega_1+\mathrm{ch}\Psi\omega_2),\quad \alpha_2 = A(\mathrm{ch}\Psi\omega_1-\mathrm{sh}\Psi\omega_2). \tag{24}$$

令

$$\omega_1^* = \mathrm{ch}\Psi\omega_1+\mathrm{sh}\Psi\omega_2,\quad \omega_2^* = \mathrm{sh}\Psi\omega_1+\mathrm{ch}\Psi\omega_2; \tag{25}$$

$$\bar{\omega}_1 = \mathrm{ch}\Psi\omega_1-\mathrm{sh}\Psi\omega_2,\quad \bar{\omega}_2 = -\mathrm{sh}\Psi\omega_1+\mathrm{ch}\Psi\omega_2. \tag{26}$$

将(25)与(26)代入(23)与(24)得

$$\theta_1 = A\omega_2^*,\theta_2 = A\omega_1^*;\quad \alpha_1 = A\bar{\omega}_2,\alpha_2 = A\bar{\omega}_1.$$

仿引理 2 的证明,注意到 $\theta_i,\alpha_i,i=1,2$,关于指标 2 求和时取负号可得

$$-\theta_{12} = \omega_{12}^* - *\,\mathrm{dlg}A,\quad -\alpha_{12} = \bar{\omega}_{12} - *\,\mathrm{dlg}A. \tag{27}$$

由(25)与(26)及引理 1 可得 $\omega_{12}^*=\omega_{12}+\mathrm{d}\Psi,\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}-\mathrm{d}\Psi$,将其代入(27)得

$$-\theta_{12} = \mathrm{d}\Psi+\omega_{12} - *\,\mathrm{dlg}A,\quad -\alpha_{12} = -\mathrm{d}\Psi+\omega_{12} - *\,\mathrm{dlg}A, \tag{28}$$

进一步有

$$-\theta_{12} = 2\mathrm{d}\Psi - \alpha_{12}. \tag{29}$$

∇H 类空时由(16)及(11)得

$$\alpha_{12} = \alpha_2. \tag{30}$$

由(28)及(30)再利用(29)得

$$-\theta_{12} = \mathrm{d}\Psi+\omega_{12} - *\,\mathrm{dlg}A = 2\mathrm{d}\Psi-\alpha_2. \tag{31}$$

由(18)及(16)得

$$\mathrm{d}*\omega_{12} = 0. \tag{32}$$

对(31)作用以"d *"并利用 (16),(32)得 $\mathrm{d}*\mathrm{d}\Psi=0$,即 Ψ 为准调和函数.类似地有

$$\mathrm{d}*\theta_{12} = 0. \tag{33}$$

外微分(16)第一式并进一步计算得

$$(\alpha_1+2*\omega_{12}+*\theta_{12})\wedge\theta_1 = 0. \tag{34}$$

由(31)后一等式得 $\mathrm{d}\Psi=\omega_{12}-*\,\mathrm{dlg}A+\alpha_2$,代入其前一等式并对其作用以准星算子后再与(34)比较得:$\mathrm{dlg}A\wedge\theta_1=0$,由此可设

$$\mathrm{dlg}A = B\theta_1. \tag{35}$$

2) 曲面为 W-曲面的充要条件

α_1,α_2 为余标架场,f 为 M 上的函数,则 $\mathrm{d}f=f_1\alpha_1+f_2\alpha_2$,外微分此式并利用(16)得

$$f_{21}-f_{12}+f_2 = 0. \tag{36}$$

而Ψ为准调和函数的充要条件是

$$\Psi_{11}-\Psi_{22}+\Psi_{1}=0, \tag{37}$$

由(12),(31),(35),(23),(24)M为W-曲面的充要条件是

$$2\Psi_{1}\mathrm{ch}2\Psi+(1-2\Psi_{2})\mathrm{sh}2\Psi=0. \tag{38}$$

3) 定理的证明

由(35)得

$$(\lg A)_{1}\alpha_{1}+(\lg A)_{2}\alpha_{2}=B\theta_{1}. \tag{39}$$

将(23),(24)代入(39)得

$$(\lg A)_{1}=B\mathrm{ch}2\Psi,\quad (\lg A)_{2}=B\mathrm{ch}2\Psi. \tag{40}$$

对(40)按余标架α_1,α_2微分得

$$\begin{cases}(\lg A)_{1i}=B_{i}\mathrm{ch}2\Psi+2B\Psi_{i}\mathrm{sh}2\Psi\\(\lg A)_{2i}=B_{i}\mathrm{sh}2\Psi+2B\Psi_{i}\mathrm{ch}2\Psi\end{cases},\quad i=1,2. \tag{41}$$

由(36)得:$(\lg A)_{21}-(\lg A)_{12}+(\lg A)_{2}=0$,将(40)与(41)代入该式得

$$B_{1}\mathrm{sh}2\Psi-B_{2}\mathrm{ch}2\Psi+B[2\Psi_{1}\mathrm{ch}2\Psi+(1-2\Psi_{2})\mathrm{sh}2\Psi]=0. \tag{42}$$

而

$$\mathrm{d}\omega_{12}=-caA^{-2}\alpha_{1}\wedge\alpha_{2}. \tag{43}$$

由(31),(43)及(16)得:$(\lg A)_{22}-(\lg A)_{11}-(\lg A)_{1}+1-acA^{-2}=0$.将(40),(41)代入此式后整理并与(42)联立解得

$$\begin{cases}B_{2}-2B\Psi_{1}-(1-acA^{-2})\mathrm{sh}2\Psi=0\\B_{1}+B(1-2\Psi_{2})-(1-acA^{-2})\mathrm{ch}2\Psi=0\end{cases}. \tag{44}$$

外微分(44)并比较系数,将所得两式相减,利用(36),(37)以及(44)得

$$-2(1-acA^{-2})[2\Psi_{1}\mathrm{ch}2\Psi+(1-2\Psi_{2})\mathrm{sh}2\Psi]+A^{-2}[(ac)_{1}\mathrm{sh}2\Psi-(ac)_{2}\mathrm{ch}2\Psi]=0. \tag{45}$$

由(23),(24)得

$$-*\mathrm{d}(ac)\wedge\theta_{2}=-[(ac)_{1}\alpha_{1}+(ac)_{2}\alpha_{2}]\wedge\theta_{2}=[(ac)_{1}\mathrm{sh}2\Psi-(ac)_{2}\mathrm{ch}2\Psi]\alpha_{1}\wedge\alpha_{2}, \tag{46}$$

再由$4ac=(a+c)^2-(c-a)^2$,(12),(31)及(40)得

$$-2*\mathrm{d}(ac)\wedge\theta_{2}=-(c+a)^{2}[2\Psi_{1}\mathrm{ch}2\Psi+(1-2\Psi_{2})\mathrm{sh}2\Psi]\alpha_{1}\wedge\alpha_{2}.$$

与(46)比较,利用(45)得$(1+H^2A^{-2})[2\Psi_{1}\mathrm{ch}2\Psi+(1-2\Psi_{2})\mathrm{sh}2\Psi]=0$.

当∇H类空时,上式第一个因子不为零,故由(38)知曲面为W-曲面.同理可证明当∇H类时的相应结论. □

作者衷心地感谢孙振祖、李志波、宋鸿藻、李海忠等教授的有益建议.

参考文献:

[1] BONNET O. *Memoire sur La theorie des surfaces applicabies* [J]. J. Ec. Polyt, 1867, **42**: 79—72.

[2] CARTAN Elie. *Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales* [J]. Bull. Sci. Math., 1942, **66**: 55—72, 74—85.

[3] CHERN S S. *Deformation of surfaces preserving principal curvature* [J]. Differential Geometry and Complex Analysis, Springer Verlag, Berlin, 1985, 155—163.
[4] CHEN Xiu-xiong, PENG Chia-kuei. *Deformation of surfaces preserving principal Curvature* [J]. LectureNotes in Math., Springer Verlag, Berlin, 1989, **1369**: 63—70.
[5] COLARES A G, KENMOTSU K. *Isometric deformation of surfaces in R^3 preserving the mean curvature function* [J]. Pacific J. Math., 1989, **136**: 71—80.
[6] O'Neill B. *Semi-Riemannian Geometry* [M]. Academic Press. New York, 1983.

Deformation Preserving Principal Curvatrue of Surfaces in R_1^3

WANG Xiao-ping[1], ZHOU Ru-rong[1], YE Zheng-lin[2]

(1. Research Center of CAD/CAM Engineering, Nanjing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu 210016, China;
2. Dept. of Math. & Info. Sci., Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

Abstract: In this paper, we mainly study the isometric deformation preserving principal curvature of surfaces in Minkowski space R_1^3. By generalizing some concepts from R^3 to R_1^3, we find these conclusions drawn by O. Bonnet or S. S. Chern are still hold in R_1^3. Moreover, we research the new case that the gradient of mean curvature is null and get some meaningful results, of which main conclusion is that non-flat surfaces that can be isometrically deformed preserving the principal curvature is certainly not W-surface.

Key words: isometric deformation; mean curvature; W-surface