第23卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 2
2003年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2003

复调和函数及其在无穷远点的性质*

杨　硕

(北京石油化工学院基础部，北京 102600)

摘　要：本文讨论了复调和函数在无穷远点的性质，揭示出有界区域上复调和函数的两类表示式之间的关系.

关键词：复调和函数；无穷远点.

分类号：AMS(2000) 30G20,30E25/CLC number：O174.3

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2003)02-0294-03

1　复调和函数

定义　设 G 为平面上的区域，在 G 上给定复函数 $F(z)$，它有关于 $\bar{z}$ 和 z 的二阶混合导数 $\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z} \partial z}, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$. 若满足复方程 $\triangle F = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$，则称 $F(z)$ 为 G 上的复调和函数.

有界区域上复调和函数的第一类表示式.

设 G 是有界区域，则 G 上的复调和函数 $F(z)$ 可表示为：

$$F(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\varphi_1(\zeta)}}{\zeta - z} d\xi d\eta + \psi_1(z) = T\,\overline{\varphi_1(z)} + \psi_1(z), \tag{1}$$

其中 $\overline{\varphi_1(z)} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$，$\psi_1(z)$ 为 G 上任意解析函数.

复调和函数的第二类表示式.

复调和函数还可以表示为：

$$F(z) = \overline{\varphi_2(z)} + \psi_2(z), \tag{2}$$

其中 $\varphi_2(z)$，$\psi_2(z)$ 为 G 上的任意解析函数，分别称为复调和函数的共轭解析加项和解析加项.

2　复调和函数在无穷远点的性质

为了研究分片复调和函数及有关的边值问题，我们必须先搞清楚复调和函数在无穷远点的性质.

定理 1　平面区域 G 上复调和函数 $F(z) = \overline{\varphi(z)} + \psi(z)$，其中 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 为 G 上的解析函

* 收稿日期：2000-08-01

作者简介：杨　硕(1972-)，硕士.

数. 若 $z=\infty\in G$，且 $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$，则有且仅有下列两种情况出现：

1）无穷远点为 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的零点，即 $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\psi(z)=0$.

2）无穷远点为 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的可去奇点，且 $\lim\limits_{z\to\infty}\psi(z)=b_0$（有限复常数），且 $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=-\overline{b}_0$.

证明 $F(z)=\overline{\varphi(z)}+\psi(z)$，分别写出 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在无穷远点处的 Laurent 展开式，有：

$$\varphi(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kz^k,\ \psi(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_kz^k,$$

$$\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\overline{a_kz^k}+b_kz^k)=(\overline{a}_0+b_0)+\lim_{z\to\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}(\overline{a_kz^k}+b_kz^k).$$

1）若 $a_k=b_k=0,k=0,1,2,\cdots$，则有 $\lim\limits_{z\to\infty}\psi(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=0$.

2）若 $b_0\neq0$，而 $a_k=b_k=0,k=1,2,\cdots$，则有 $a_0\neq0$，且 $\lim\limits_{z\to\infty}\psi(z)=b_0$，$\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=a_0=-\overline{b}_0$，否则，若有 $b_n\neq0,n=1,2,\cdots$.

设 $z=re^{i\theta}$，当 z 沿射线 $\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ 趋于无穷远点时，有

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{z\to\infty\\ \theta=\frac{2\pi}{n}}}F(z)&=\lim_{\substack{z\to\infty\\ \theta=\frac{2\pi}{n}}}\sum_{k=1}^{+\infty}(\overline{a_kz^k}+b_kz^k)+(\overline{a}_0+b_0)\\&=\lim_{\substack{r\to+\infty\\ \theta=\frac{2\pi}{n}}}\Big[\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{+\infty}r^k(\overline{a}_ke^{-\frac{2k\pi i}{n}}+b_ke^{\frac{2k\pi i}{n}})+r^n(\overline{a}_n+b_n)\Big]+(\overline{a}_0+b_0)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\overline{a}_n+b_n=0.$$

当 z 沿射线 $\theta=\dfrac{\pi}{2n}$ 趋于无穷远点时，有

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{z\to\infty\\ \theta=\frac{\pi}{2n}}}F(z)&=\lim_{\substack{z\to\infty\\ \theta=\frac{\pi}{2n}}}\sum_{k=1}^{+\infty}(\overline{a_kz^k}+b_kz^k)+(\overline{a}_0+b_0)\\&=\lim_{\substack{r\to+\infty\\ \theta=\frac{\pi}{2n}}}\Big[\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{+\infty}r^k(\overline{a}_ke^{-\frac{k\pi i}{2n}}+b_ke^{\frac{k\pi i}{2n}})+r^n(\overline{a}_n+b_n)i\Big]+(\overline{a}_0+b_0)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow-\overline{a}_n+b_n=0.$$

所以有 $\overline{a}_n=b_n=0$. 矛盾！

定理 2（有界区域上复调和函数的两类表示式间的关系） 设 S^+ 为平面上有界区域，$0\in S^+$，S^+ 上复调和函数有第一类表示式：$F(z)=T\,\overline{\varphi_1(z)}+\psi_1(z)$，第二类表示式：$F(z)=\overline{\varphi_2(z)}+\psi_2(z)$，其中 $\varphi_1(z),\psi_1(z),\varphi_2(z),\psi_2(z)$ 为 S^+ 上的解析函数. 则有

1） $\varphi_1(z)=\varphi_2'(z)$；

2） $\psi_1(z)-\psi_2(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\overline{\varphi_2(\tau)}}{\tau-z}d\tau$；

3） $T\,\overline{\varphi_1(z)}=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\overline{\varphi_2(\tau)}\Big(\frac{d\tau}{\tau-z}-\frac{d\overline{\tau}}{\overline{\tau}-\overline{z}}\Big)$.

证明 1) 由 $F(z)=T\overline{\varphi_1(z)}+\psi_1(z)$，有 $\frac{\partial F}{\partial\bar z}=\overline{\varphi_1'(z)}$. 又由 $F(z)=\overline{\varphi_2(z)}+\psi_2(z)$，有 $\frac{\partial F}{\partial\bar z}=\overline{\varphi_2'(z)}$，所以

$$\varphi_1(z)=\varphi_2'(z).$$

2) $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{F(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{T\overline{\varphi_1(\tau)}+\psi_1(\tau)}{\tau-z}d\tau=\varphi_1(z),z\in S^+$. 又 $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{F(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi_2(\tau)}+\psi_2(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi_2(\tau)}}{\tau-z}d\tau+\psi_2(z),z\in S^+$. 所以

$$\psi_1(z)-\psi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi_2(\tau)}}{\tau-z}d\tau.$$

3)
$$T\overline{\varphi_1(z)}=\overline{\varphi_2(z)}+\psi_2(z)-\psi_1(z)=\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-z}d\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi_2(\tau)}}{\tau-z}d\tau$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\varphi_2(\tau)}\left(\frac{d\tau}{\tau-z}-\frac{d\bar\tau}{\bar\tau-\bar z}\right)$$

参考文献：

[1] 赵 桢. 双解析函数与复调和函数以及它们的基本边值问题 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，1995，**31**(2)：175—179.
ZHAO Zhen. *Bianalytic functions, complex harmonic functions, and their basic boundary value problems* [J]. J. of Beijing Normal University (Natural Science), 1995, **31**(2): 175—179. (in Chinese)

[2] 杨 硕. 双解析函数与复调和函数的广义 Riemman-Hilbert-Poincaré 边值问题 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，1997，**33**(3)：285—289.
YANG Shuo. *Generalized Riemann-Hilbert-Poincaré boundary value problems for bianalytic functions and complex harmonic functions* [J]. J. of Beijing Normal University (Natural Science), 1997, **33**(3): 285—289. (in Chinese)

[3] MIKHLIN S G, PRÖSSDORF S. *Singular Integral Operators* [M]. Springer-Verlag World Publishing Corporation, 1989.

[4] 李明忠，侯宗义，徐振远. 椭圆型方程组理论和边值问题 [M]. 上海：复旦大学出版社，1990.
LI Ming-zhong, HOU Zong-yi, XU Zhen-yuan. *Theory and Boundary Value Problems for Elliptic System of Equations* [M]. Shanghai: Publishing House of Fudan University. (in Chinese)

The Properties of Complex Harmonic Functions on Infinity

YANG Shuo

(Beijing Institute of Petro-Chemical Technology, Beijing 102600, China)

Abstract: In this paper, the properties of complex harmonic function on infinity are considered, and the relationship between two kinds of expressions of complex harmonic function is discovered.

Key words: complex harmonic function; infinity.